


## עבודת קיץ במתמטיקה- עולים לי"א 4 יחל

תלמיד/ה יקר/ה,

בתחילת שנת הלימודים תתקיים חזרה קצרה על הנושאים שנלמדו בשנה החולפת ובסיומה יערך מבדק לכלל התלמידים בכל שכבה (שכבות ז' - יב'). המבדק יתבסס על הנושאים והתרגילים המופיעים בחוברת העבודה לקיץ, שהוכנה עבורכם ע"י צוות מתמטיקה.

מטרת העבודה לסייע לכם ל"שמור על כושר" ולרענן את הידע הלימודי לפני תחילת שנת הלימודים.

העבודה נשלחה במערכת  ותוכלו להורידה גם מאתר בית הספר שלנו. אנו ממליצים בחום רב לתרגל ולהתאמן לאורך החופשה ולא להשאיר לימים האחרונים, וזאת בכדי לאפשר הפנמה של החומר ותרגול בכיף ובהנאה!

נושאים שנלמדו השנה:

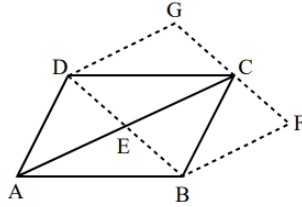
<u>גיאומטריה</u>	<u>חשבון דפרניציאלי</u>
משולש ישר זווית- "תיכון ליתר שווה למחצית היתר" ומשפט הפוך "ניצב מול 30 מעלות שווה למחצית היתר ומשפט הפוך.	כל סוגי הנגזרות- פולינום, מכפלה, מנה, מורכבת, שורש
קטע אמצעים במשולש	משיק- שיפוע ומשוואת משיק כולל פרמטרים.
קטע אמצעים בטרפז	חקירת פונקציה- פולינום, מנה, שורש
נקודת מפגש תיכונים במשולש	מינימום ומקסימום מוחלט
משפט תאלס והרחבותיו	פונקציה זוגית ואי זוגית
משפט חוצה זווית	הקשר בין גרף הפונקציה לגרף הנגזרת
דמיון משולשים	בעיות קיצון- מספרים וגיאומטריות (פולינום ומנה)
משפטי חפיפה- כולל משפט חפיפה רביעי	תחום הגדרה פונקציית שורש
מעגל- כל המשפטים עד מעגל חוסם וחסום (לא כולל)	משוואות עם שורשים
	טכניקה אלגברית- נוסחאות כפל מקוצר, פיתרון משוואה ריבועית, אי שיויונים.

בעבודה בסה"כ 96 שאלות: 30 בגיאומטריה, ו- 66 בחשבון דפרניציאלי.

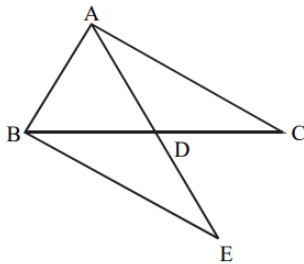
**חופשה נעימה**

## גיאומטריה

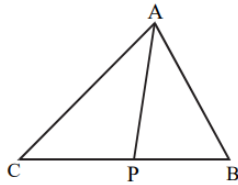
### בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)



1. המרובעים ABCD ו-BFGD הם מקביליות.  
נתון:  $CG = CF$  (C על הקטע GF).  
א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.  
ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין, אז המרובע ECGD הוא מלבן.

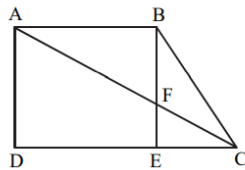


2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש ABC, כך ש- $\angle ADB < 90^\circ$ .  
נקודה E נמצאת על המשך הקטע AD כך שמתקיים  $AD = DE$ ,  $AC = BE$ .  
א. הוכח: AD תיכון ל-BC במשולש ABC.  
ב. הוכח:  $S_{ABD} = S_{BDE}$ .



3. בצירוף שלפניך נתון:  $AB = 12$  ס"מ,  $AC = 15$  ס"מ,  $AP = 10$  ס"מ,  $PB = 8$  ס"מ.  
א. הוכח: AP חוצה את הזווית BAC.  
ב. הוכח:  $\triangle ABP \sim \triangle CBA$ .  
ג. חשב את אורך הקטע AP.

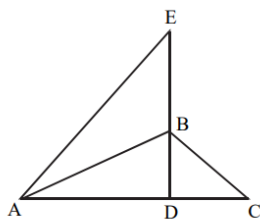
**תשובה:** ג. 10 ס"מ.



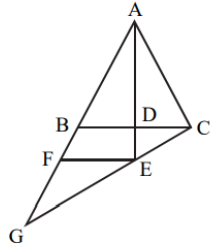
4. לפיך טרפז ישר-זווית ABCD ( $\angle ADC = 90^\circ$ ,  $AB \parallel DC$ ).  
BE הוא הגובה לבסיס DC.  
האלכסון AC חוצה את הזווית BCD, וחותך את הגובה BE בנקודה F.  
נתון:  $\frac{BC}{EC} = 2$ ,  $S_{EFC} = 4$  סמ"ר.

- א. חשב את שטח המשולש ABF.  
ב. חשב את שטח המלבן ABED.

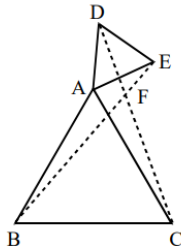
**תשובה:** א. 16 סמ"ר. ב. 48 סמ"ר.



5. במשולש ABC, הגובה לצלע AC הוא BD.  
נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD, כך ש-AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).  
נתון:  $\angle BCA = 2 \cdot \angle BAC$ .  
א. הוכח:  $BC \cdot ED = BD \cdot EA$ .  
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א', והוכח:  $BC \cdot ED = AD \cdot BE$ .

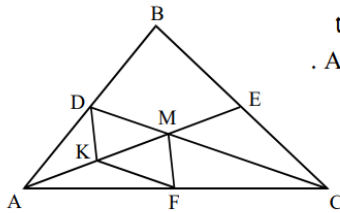


6. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ).  
 G היא נקודה על המשך הצלע AB. הקטע FE מקביל ל-BC.  
 נתון:  $\frac{GF}{BF} = \frac{AG}{AC}$ . הוכח:  $AE \perp BC$ .

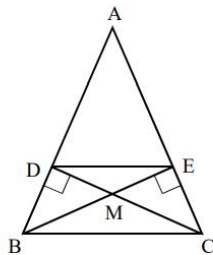


7. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווים-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.  
 א. הוכח:  $BE = CD$ .  
 ב. הוכח:  $\angle ACD = \angle ABE$ .  
 ג. חשב את הזווית BFC.

תשובה: ג.  $60^\circ$ .

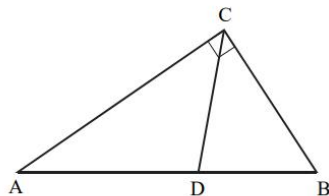


8. התיכונים AE ו- CD במשולש ABC נפגשים בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM. F היא נקודה על הצלע AC כך ש-  $KF \parallel DC$  (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $2KF = MC$ .  
 ב. הוכח: המרובע KDMF הוא מקבילית.



9. במשולש שווה-שוקיים ABC ( $AB = AC$ ), BE ו- CD הם גבהים לשוקיים. M היא נקודת המפגש בין הגבהים.  
 א. (1) הוכח כי  $BD = EC$ .  
 (2) הוכח כי  $DE \parallel BC$ .  
 ב. נתון:  $\angle ABC = 60^\circ$ . מצא את היחס  $\frac{DM}{MC}$ .

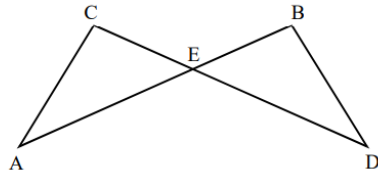
תשובה: ב.  $\frac{1}{2}$ .



10. במשולש ישר-זווית ACB ( $\angle ACB = 90^\circ$ ) חוצה-זווית ACB (ראה ציור).  
 א. (1) הוכח:  $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$ .  
 (2) נתון:  $BC = 21$  מ"מ,  $AC = 28$  מ"מ. חשב את האורך של הקטע DB.  
 ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB. האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח כי  $\frac{CN}{AC} = \frac{BC}{AB}$ .  
 ג. חשב את האורך של הקטע DN.

תשובה: א. (2) 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.

11. הקטעים AB ו-CD נחתכים בנקודה E. נתון:  $AE \cdot EB = CE \cdot ED$ .



א. הוכח כי  $\triangle AEC \sim \triangle DEB$ .

ב. הוכח כי  $\triangle AED \sim \triangle CEB$ .

ג. נתון גם:  $CB \parallel AD$ .

הוכח:  $\triangle AEC \cong \triangle DEB$

ד. נתון גם:  $AC \perp CE$ ,  $\frac{AD}{CB} = \frac{5}{3}$ ,

3 ס"מ = CE.

(1) חשב את האורך של ED.

(2) חשב את האורך של AC.

תשובה: ד. (1) 5 ס"מ. (2) 4 ס"מ.

12. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית

( $\angle ABC = 90^\circ$ ). BE הוא תיכון לצלע AC,

ו-CD הוא תיכון לצלע AB.

התיכונים BE ו-CD נחתכים בנקודה F.

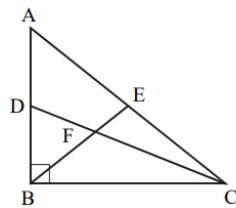
א. חשב את היחס  $\frac{FB}{AC}$ .

ב. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC

להיקף המשולש EFD.

ג. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC, והנקודה N היא אמצע

הקטע FB. הוכח כי המרובע DEMN הוא מקבילית.



תשובה: א.  $\frac{1}{3}$ . ב. 2.

13. במשולש ABC נתון:  $AB = AC$ ,  $AK = AL$ .

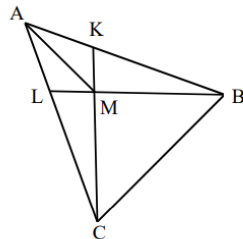
M היא נקודת המפגש בין הקטעים CK ו-BL.

א. הוכח: (1)  $LB = KC$

(2)  $MK = ML$

(3)  $\angle MAC = \angle MAB$

ב. נתון:  $\frac{CM}{MK} = \frac{7}{3}$ . מצא את היחס  $\frac{AB}{AL}$ .



תשובה: ב.  $\frac{7}{3}$ .

14. בטרפז ABCD ( $BC \parallel AD$ ) הנקודות M ו-N

הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו-DM

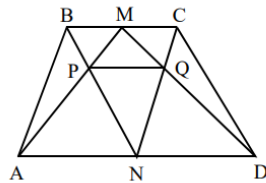
נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו-BN

נחתכים בנקודה P (ראה ציור).

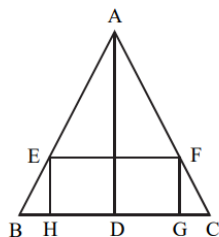
א. הוכח:  $PQ \parallel AD$ .

ב. נתון גם:  $AD = 2a$ ,  $BC = a$ .

הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

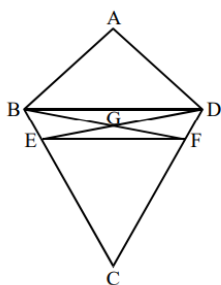


תשובה: ב.  $\frac{2}{3}a$ .

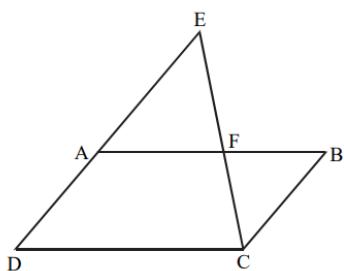


15. במשולש שווה-שוקיים  $ABC$  ( $AB = AC$ ) חסום מלבן  $EFGH$ , כך שהאלכסון  $HF$  מאונך לשוק  $AC$ .  $AD$  הוא תיכון לבסיס  $BC$ . נתון:  $AD = BC$ .
- א. הוכח:  $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$ .
- ב. הוכח:  $\triangle AHGF \sim \triangle FGC$ .
- ג. נתון:  $10$  ס"מ  $HG =$ . מצא את  $GC$ .

תשובה: ג.  $2.5$  ס"מ.

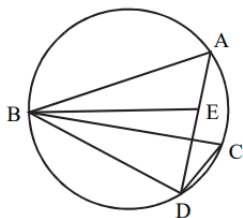


16.  $ABCD$  הוא דלתון שבו  $AB = AD$  ו- $BC = DC$ .  $E$  נקודה על הצלע  $BC$ , ו- $F$  נקודה על הצלע  $DC$  כך ש- $DE$  חוצה את הזווית  $ADC$ , ו- $BF$  חוצה את הזווית  $ABC$ .  $DE$  ו- $BF$  נפגשים בנקודה  $G$ . (ראה ציור).
- א. הוכח: (1)  $GB = GD$ .
- (2)  $\triangle BGE \cong \triangle DGF$ .
- ב. הוכח כי המרובע  $DBEF$  הוא טרפז שווה-שוקיים.

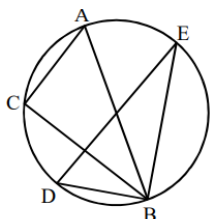


17. המרובע  $ABCD$  הוא מקבילית (ראה ציור).
- א. הוכח:  $\frac{BF}{FA} = \frac{AD}{AE}$ .
- ב. (1) הוכח:  $\frac{S_{\triangle ADF}}{S_{\triangle AEF}} = \frac{AD}{AE}$ .
- (2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1), והוכח:  $S_{\triangle ADF} = S_{\triangle BEF}$ .

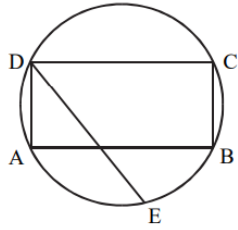
## בעיות עם מעגל (כולל פרופורציה ודמיון)



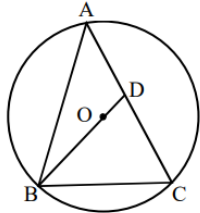
2.  $A, B, C, D$  הן נקודות על מעגל, כמתואר בציור.  $E$  היא נקודה על  $AD$ , כך ש- $AE = DC$ . נתון:  $AB = BC$ .
- א. הוכח:  $\triangle ABE \cong \triangle CBD$ .
- ב. המשך הקטע  $BE$  חותך את המעגל בנקודה  $M$ . הוכח:  $AM = DC$ .



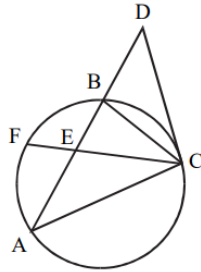
3.  $AB$  הוא קוטר של מעגל. הנקודות  $C, D$  ו- $E$  נמצאות על המעגל כך ש- $\widehat{AE} = \widehat{DC}$ . הוכח:  $DE \perp BC$ .



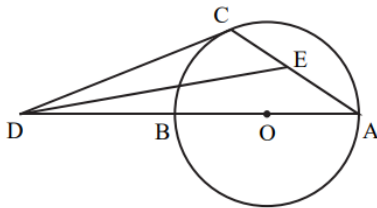
4. מלבן ABCD חסום במעגל.  
 הנקודה E נמצאת על הקשת AB  
 כך ש-  $DE = DC$  (ראה ציור).  
 א. הוכח:  $EB = BC$ .  
 ב. הוכח:  $\angle EDB = \angle DBA$ .



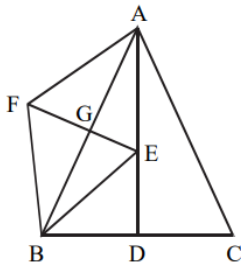
5. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו  
 בנקודה O. נתון:  $\angle ACB = 68^\circ$ .  
 המשך הרדיוס OB חותך את AC  
 בנקודה D. חשב את הזווית ABD.



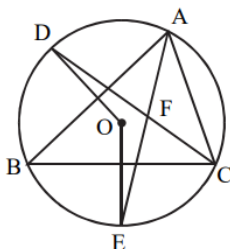
8. המשולש ABC חסום במעגל. המשיק  
 למעגל בנקודה C והמשך המיתר AB  
 נפגשים בנקודה D. E היא נקודה  
 על המיתר AC. נתון:  $DC = DE$ .  
 הוכח:  $AF = BF$ .



9. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.  
 המשיק למעגל בנקודה C חותך  
 את המשך הקוטר AB בנקודה D.  
 E נקודה על המיתר AC כך ש-  
 $DE \perp AC$ . חוזה את הזווית  
 $\angle DEC$ : הוכח:  $\angle DEC = 45^\circ$ .

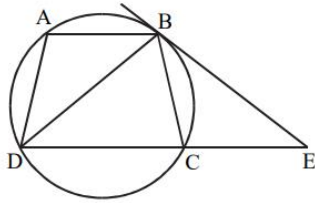


10. AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים  
 ABC ( $AB = AC$ ). E היא נקודה על AD  
 כך שהמרובע AEBF הוא דלתון  
 ( $AF = BF$ ,  $AE = BE$ ).  
 א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל  
 החוסם את המשולש ABC.  
 ב. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל  
 החוסם את המשולש ABD.

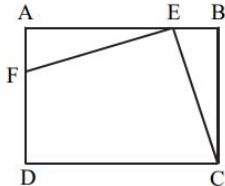


11. במעגל שמרכזו בנקודה O נתון:  
 הרדיוס OD מאונך למיתר AB  
 והרדיוס OE מאונך למיתר BC.  
 הוכח: הנקודה F היא מרכז המעגל  
 החסום בתוך המשולש ABC.

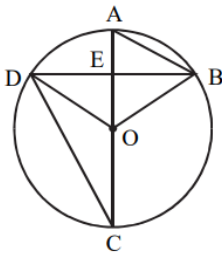
12. טרפז ABCD ( $AB \parallel DC$ ) חסום במעגל  
 כך שהבסיס הקטן AB שווה לשוק AD.  
 E היא נקודה על המשך הבסיס DC  
 כך ש- BE משיק למעגל.  
 א. הוכח:  $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ .  
 ב. הוכח:  $AB = CE$ .



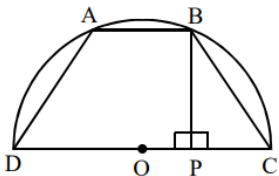
13. הנקודות E ו-F נמצאות על הצלעות AB ו-AD של מלבן ABCD. נתון:  $AE = BC$ ,  $AF = BE$ .  
 א. הוכח:  $\angle AEF = \angle BCE$ .  
 ב. הוכח: המעגל העובר דרך הנקודות E, C, D ו-F עובר גם דרך הנקודה E.  
 ג. הוכח:  $\angle FCE = \angle FDE$ .



16. AC הוא קוטר ו-BD הוא מיתר במעגל שמרכזו O.  
 נתון:  $BD \perp AC$ .  
 א. הוכח:  $S_{ABO} = S_{DOC}$ .  
 ב. הוכח:  $S_{ABOD} = S_{ADC}$ .

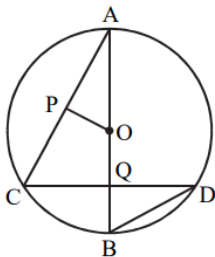


17. בחצי עיגול שקוטרו 18 ס"מ חוסמים טרפז שווה-שוקיים ABCD. BP הוא אנך לקוטר CD. O – מרכז המעגל. נתון:  $BC = 10$  ס"מ.  
 א. חשב את אורך הקטע OP.  
 ב. חשב את שטח הטרפז.



תשובה: א.  $3\frac{4}{9}$  ס"מ. ב. 103.47 סמ"ר.

18. AB הוא קוטר במעגל O.  
 AC ו-CD הם מיתרים שווים במעגל.  
 נתון: P אמצע המיתר AC, Q אמצע המיתר CD.  
 א. הוכח:  $\triangle APO \cong \triangle DQB$ .  
 ב. הוכח:  $OQ = BQ$ .

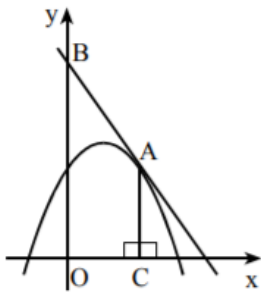




## חדווא

1. הישר  $y=5$  חותך את הפרבולה  $y=x^2+1$  בשתי נקודות.  
א. מצא את משוואות המשיקים לפרבולה בנקודות אלה.  
ב. מצא את נקודת החיתוך בין שני המשיקים שמצאת בסעיף א'.

תשובה: א.  $y=4x-3$ ,  $y=-4x-3$ . ב.  $(0;-3)$ .



2. לגרף הפונקציה  $y=-x^2+2x+3$  מעבירים משיק בנקודה  $A(2;3)$ . המשיק חותך את ציר ה- $y$  בנקודה  $B$ . מנקודה  $A$  מורידים אנך  $AC$  לציר ה- $x$ . חשב את שטח הטרפז  $ABOC$  ( $O$  - ראשית הצירים).

תשובה: 10.

3. הישר  $y=2x+4$  משיק לגרף הפונקציה  $f(x)=x^2+8x+c$ . מצא את ערכו של  $c$ .

תשובה: 13.

4. לגרף הפונקציה  $y=ax^2+1$  מעבירים משיק בנקודה  $x=1$ .  
א. הבע באמצעות  $a$  את משוואת המשיק.  
ב. המשיק שמצאת בסעיף א' חותך את ציר ה- $x$  בנקודה שבה  $x=2$ . מצא את  $a$ .

תשובה: א.  $y=2ax+1-a$ . ב.  $-\frac{1}{3}$ .

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:  
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.  
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

5.  $y=x(12-x^2)$  .6.  $y=x^4-18x^2+32$



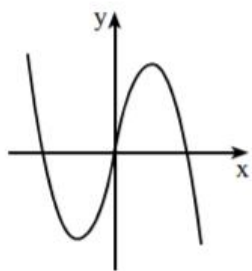
7. נתונה הפונקציה  $f(x) = -x^3 + 15x^2 - 63x + 49$ .
- חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- $y$ .
  - הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- $x$  היא  $(1;0)$ .
  - שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- $x$ ?

8. חקור את הפונקציה  $y = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$  ומצא: א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה. ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

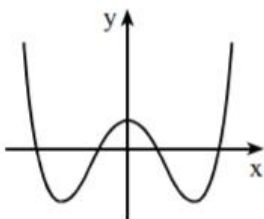
9. נתונה הפונקציה  $y = x^4 - 4x^2$ .
- חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
  - מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
  - מצא לאילו ערכים של  $k$ , הפונקציה חותכת את הישר  $y = k$ :
- (1) ב-4 נקודות. (2) ב-3 נקודות. (3) ב-2 נקודות. (4) באף נקודה.

10. לפונקציה  $f(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + mx + 10$  יש נקודת קיצון ב- $x = 1$ .
- מצא את  $m$ .
  - מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
  - מצא כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) - 13 = 0$ .

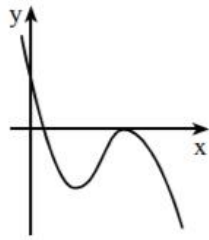
### תשובות:



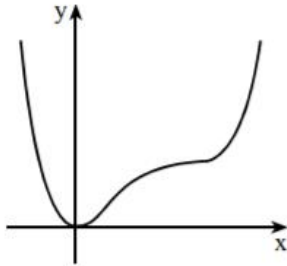
5. א. כל  $x$ .  
 ב.  $(2;16)$  מקסימום,  $(-2;-16)$  מינימום.  
 ג. עלייה:  $-2 < x < 2$ ,  
 ירידה:  $x < -2$  או  $x > 2$ .  
 ד.  $(-3.464;0)$ ,  $(3.464;0)$ ,  $(0;0)$ .



6. א. כל  $x$ .  
 ב.  $(3;-49)$  מינימום,  $(0;32)$  מקסימום,  
 $(-3;-49)$  מינימום.  
 ג. עלייה:  $x > 3$  או  $-3 < x < 0$ ,  
 ירידה:  $0 < x < 3$  או  $x < -3$ .  
 ד.  $(-\sqrt{2};0)$ ,  $(\sqrt{2};0)$ ,  $(-4;0)$ ,  $(4;0)$ ,  $(0;32)$ .

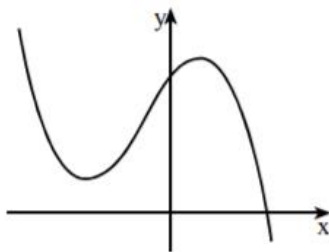


7. א. תחום הגדרה: כל  $x$ .  
 ב. נקודות קיצון:  $(3; -32)$  מינימום,  $(7; 0)$  מקסימום.  
 ג. עלייה:  $3 < x < 7$ ; ירידה:  $x < 3$  או  $x > 7$ .  
 ד. נקודת חיתוך:  $(0; 49)$ .  
 ב. בשתי נקודות.



8. א. כל  $x$ .  
 ב.  $(0; 0)$  מינימום.  
 ג. עלייה:  $x > 0$ , ירידה:  $x < 0$ .  
 ד.  $(0; 0)$ .

9. א. תחום הגדרה: כל  $x$ . נקודות קיצון:  $(\sqrt{2}; -4)$  מינימום,  $(0; 0)$  מקסימום,  $(-\sqrt{2}; -4)$  מינימום. נקודות חיתוך:  $(-2; 0)$ ,  $(0; 0)$ ,  $(2; 0)$ .  
 ב. חיוביות:  $x > 2$  או  $x < -2$ , שליליות:  $-2 < x < 2$ ,  $x \neq 0$ .  
 ג. (1)  $-4 < k < 0$ . (2)  $k = 0$ . (3)  $k > 0$  או  $k = -4$ . (4)  $k < -4$ .



10. א. 3.  
 ב.  $(1; 11\frac{2}{3})$  מקסימום,  $(-3; 1)$  מינימום.  
 ג. פתרון אחד.

11. הפונקציה  $y = x^3 - 15x^2 + 48x - 3$  מוגדרת בקטע  $[0, 11]$ .  
 א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.  
 ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- $x$  בשלוש נקודות שונות.

תשובה: א. 41, -67.

12. מצא את משוואת המשיק לפונקציה  $y = (x^2 - 8)^5$  בנקודה  $x = 3$ .

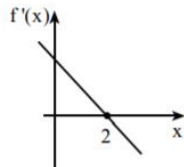
תשובה:  $y = 30x - 89$ .

13. לגרף הפונקציה  $y = (x+4)^3$  מעבירים שני משיקים בעלי שיפוע 3.  
 א. מצא את שיעורי נקודות ההשקה.  
 ב. מצא את משוואות המשיקים.

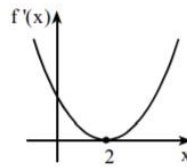
תשובה: א.  $(-3;1)$ ,  $(-5;-1)$ . ב.  $y = 3x+14$ ,  $y = 3x+10$ .

14. מצא עבור הפונקציה  $y = (x^2 - 6x)^3$ :  
 א. נקודות מינימום ומקסימום. ב. תחומי עלייה וירידה.  
 ג. נקודות חיתוך עם הצירים. ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

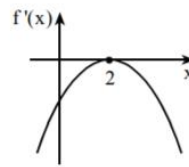
15. לפונקציה  $f(x)$  יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x = 2$ .  
 א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת  $f'(x)$  עבור  $x < 2$ ?  
 ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את גרף הנגזרת  $f'(x)$  של הפונקציה  $f(x)$ ? נמק את בחירתך.



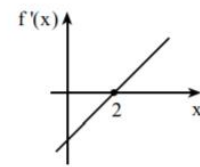
גרף 1



גרף 2

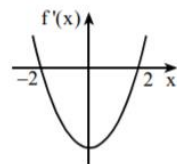


גרף 3



גרף 4

16. לפונקציה  $g(x)$  יש שתי נקודות קיצון בלבד. נקודת מקסימום ב- $x = -1$  ונקודת מינימום ב- $x = 5$ . שרטט גרף של הפונקציה הנגזרת  $g'(x)$ .



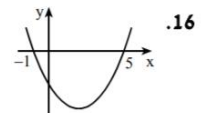
17. בציור מתואר גרף הנגזרת  $f'(x)$  של פונקציה  $f(x)$ .  
 א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. מצא את שיעורי ה- $x$  של נקודות הקיצון של הפונקציה  $f(x)$  וקבע את סוג הקיצון.  
 ג. נתון גם:  $f(0) = 0$ . שרטט סקיצה של גרף הפונקציה  $f(x)$ .

תשובות:

14. א.  $(3; -729)$  מינימום.

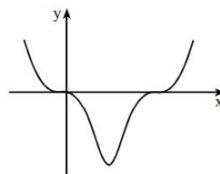
ב. עלייה:  $x > 3$ , ירידה:  $x < 3$ .  
 ג. א.  $(0;0)$ ,  $(6;0)$ .

15. א. חיובי. ב. גרף 1.



17. א. עלייה:  $x > 2$  או  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$ .

ב.  $x = -2$  מקסימום,  $x = 2$  מינימום.



1. נתונה הפונקציה  $y = \frac{x^2 + 8x}{x^2 + 8}$ .

- א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. מצא לאילו ערכים של  $k$ , הישר  $y = k$  חותך את גרף הפונקציה:  
 (1) בנקודה אחת. (2) בשתי נקודות. (3) באף נקודה.

2. לגרף הפונקציה  $f(x) = \frac{2x^2 + ax}{x^2 - 7x + 10}$  יש נקודת קיצון ב- $x = 3$ .  
 א. מצא את  $a$ .

- ב. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, תחומי עלייה וירידה, נקודות קיצון, אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. בכל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק לגרף הפונקציה. חשב את המרחק בין שני המשיקים.

3. הישר  $x = -1$  הוא אסימפטוטה לפונקציה  $y = \frac{ax + 16}{x^2 - 3x - b}$ . בנקודה  $x = 2$  לפונקציה יש נקודת קיצון.

- א. מצא את  $a$  ואת  $b$ .  
 ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה.  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים ישר המקביל לציר ה- $x$  וישר המקביל לציר ה- $y$ . ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מלבן. חשב את שטח המלבן.



4. לפונקציה  $f(x) = \frac{ax^2 + 8x - 28}{x^2 - 4}$  יש אסימפטוטה אופקית  $y = 2$ .  
 א. מצא את  $a$ .  
 ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.  
 ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ד. (1) מצא את נקודת החיתוך בין גרף הפונקציה לבין האסימפטוטה האופקית של הפונקציה.  
 (2) מצא לאילו ערכי  $x$  גרף הפונקציה נמצא מעל האסימפטוטה האופקית שלו.

5. לפונקציה  $f(x) = \frac{2x^3 + ax}{x^2 - 1}$  יש מינימום בנקודה  $x = 2$ .  
 א. מצא את הערך של הפרמטר  $a$ .  
 ב. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.  
 ג. מצא את נקודות המינימום והמקסימום של הפונקציה.  
 ד. כמה פתרונות יש למשוואה  $f(x) = 7$ ?

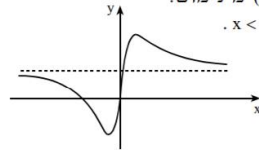
6. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{Ax^2 + x - 2}{x^2 - x - 2}$ .  
 בנקודה שבה  $x = 1$  שיפוע המשיק הוא  $-\frac{3}{2}$ .  
 א. מצא את הפונקציה  $f(x)$ .  
 ב. מצא אסימפטוטות לפונקציה המקבילות לצירים.  
 ג. הפונקציה  $g(x)$  מקיימת:  $g(x) = 3f(x) + k$ . האסימפטוטה האופקית של הפונקציה  $g(x)$  היא  $y = 5$ . מצא את הערך של  $k$ .

12. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{-8x}{x^2 + 4}$ .  
 א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עליה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. הפונקציה  $g(x)$  היא נגזרת של הפונקציה  $f(x)$ , כלומר  $g(x) = f'(x)$ . שרטט בתחום  $-2 \leq x \leq 2$  את גרף הפונקציה  $g(x)$ . הנח שבתחום הנ"ל יש לפונקציה  $g(x)$  נקודת קיצון אחת בלבד.

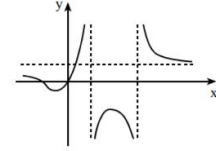
13. נתונה הפונקציה  $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$ .  
 א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עליה וירידה, (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.  
 ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.  
 ג. מצא את התחום שבו הפונקציה  $f(x)$  שלילית וגם הנגזרת  $f'(x)$  שלילית.

**תשובות:**

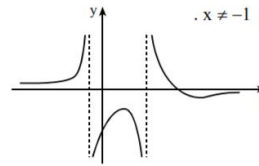
1. א. תחום הגדרה: כל  $x$ .  
 נקודות קיצון: (4;2) מקסימום, (-2;-1) מינימום.  
 עלייה:  $-2 < x < 4$ , ירידה:  $x < -2$  או  $x > 4$ .  
 נקודות חיתוך: (-8;0), (0;0).  
 אסימפטוטות:  $y=1$ .  
 ג. (1)  $k=1$  או  $k=2$  או  $k=-1$ .  
 (2)  $-1 < k < 2$ ,  $k \neq 1$ .  
 (3)  $k > 2$  או  $k < -1$ .



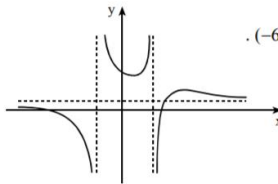
2. א. 6. ב. תחום הגדרה:  $x \neq 5$ ,  $x \neq 2$ .  
 נקודות חיתוך: (-3;0), (0;0).  
 עלייה:  $2 < x < 3$  או  $-1 < x < 2$ .  
 ירידה:  $x > 5$  או  $3 < x < 5$  או  $x < -1$ .  
 מקסימום: (3;-18), מינימום:  $(-1; -\frac{2}{9})$ .  
 אסימפטוטות:  $x=2$ ,  $x=5$ ,  $y=2$ . ד.  $17\frac{7}{9}$ .



3. א.  $b=4$ ,  $a=-2$ . ב. תחום הגדרה:  $x \neq -1$ ,  $x \neq 4$ .  
 נקודות חיתוך: (8;0), (0;-4).  
 אסימפטוטות:  $y=0$ ,  $x=4$ ,  $x=-1$ .  
 נקודות קיצון: (2;-2) מקסימום, (14;-0.08) מינימום.  
 עלייה:  $x > 14$  או  $-1 < x < 2$  או  $x < -1$ .  
 ירידה:  $4 < x < 14$  או  $2 < x < 4$ . ד. 23.04.



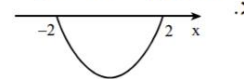
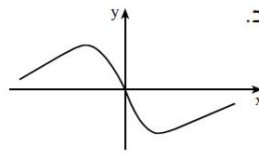
4. א. 2. ב. תחום הגדרה:  $x \neq -2$ ,  $x \neq 2$ .  
 נקודות חיתוך: (-6.243;0), (2.243;0), (0;7).  
 אסימפטוטות:  $y=2$ ,  $x=-2$ ,  $x=2$ .  
 נקודות קיצון: (4;3) מקסימום, (1;6) מינימום. עלייה:  $2 < x < 4$  או  $x > 4$ .  
 ירידה:  $-2 < x < 1$  או  $x < -2$ .  
 ד. (1) (2.5;2). (2)  $x > 2.5$  או  $-2 < x < 2$ .



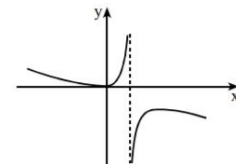
5. א. 1.6. ב.  $x=-1$ ,  $x=1$ . ג. (2;6.4) מינימום, (-2;-6.4) מקסימום. ד. שלושה.

6. א.  $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x-2}$ . ב.  $x=2$ ,  $x=-1$ ,  $y=1$ . ג. 2.

12. א. (1) כל  $x$ .  
 (2) (-2;-2) מקסימום, (2;-2) מינימום.  
 (3) עלייה:  $x > 2$  או  $x < -2$ , ירידה:  $-2 < x < 2$ .  
 (4) (0;0). (5)  $y=0$ .  
 ג.



13. א. (1)  $x \neq 3$ . (2) (0;0) מינימום, (6;-12) מקסימום.  
 (3) עלייה:  $3 < x < 6$  או  $0 < x < 3$ ; ירידה:  $x > 6$  או  $x < 0$ .  
 (4) (0;0). (5)  $x=3$ . ג.  $x > 6$ .



## טכניקה אלגברית

### אי-שוויונים ממעלה ראשונה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} 6x > 2(3x-1) & \text{(2)} \\ (x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + 20 & \text{(4)} \\ 4(6x-8) < 8(3x-4) & \text{(6)} \\ \frac{7-x}{10} - \frac{3x-1}{5} + \frac{x+4}{3} < 7 & \text{(8)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} 45x - 26 > 109 & \text{(1)} \\ 2(x-5) \geq \frac{1}{2}(4x+6) & \text{(3)} \\ \frac{8x-4}{2} < \frac{9(x+1)}{3} & \text{(5)} \\ \frac{x-6}{3} - \frac{x-4}{4} \geq 12-x & \text{(7)} \end{array}$$

### אי-שוויונים ממעלה שנייה:

פתור את אי-השוויונים הבאים:

$$\begin{array}{ll} x^2 - 12x > -32 & \text{(10)} \\ (x+2)(x+4) < 35 & \text{(12)} \\ (x-3)(x-7) \geq 8x-56 & \text{(14)} \\ (5x+6)^2 \leq 4(x-3)^2 & \text{(16)} \\ x^2 - 10x + 25 > 0 & \text{(18)} \\ 2x^2 + 2x + 24 \geq 0 & \text{(20)} \end{array} \quad \begin{array}{ll} x^2 < 144 & \text{(9)} \\ (x+2)(x+5) < 0 & \text{(11)} \\ -x^2 + 13x + 30 < 0 & \text{(13)} \\ (x-5)^2 + x(x+2) < 89 & \text{(15)} \\ -3x^2 + 12x > 0 & \text{(17)} \\ (x-3)^2 > (x-1)(x+6) - x^2 - 3x & \text{(19)} \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} \text{(1) } x > 3 \quad \text{(2) כל } x \quad \text{(3) } x \text{ אף } x \quad \text{(4) } x > -2 \quad \text{(5) } x < 5 \quad \text{(6) } x \text{ אף } x \quad \text{(7) } x \geq 12 \quad \text{(8) } x > -13 \\ \text{(9) } -12 < x < 12 \quad \text{(10) } x > 8, x < 4 \quad \text{(11) } -5 < x < -2 \quad \text{(12) } -9 < x < 3 \\ \text{(13) } x > 15, x < -2 \quad \text{(14) } x \geq 11, x \leq 7 \quad \text{(15) } -4 < x < 8 \quad \text{(16) } -4 \leq x \leq 0 \\ \text{(17) } 0 < x < 4 \quad \text{(18) } x < 5, x > 5 \quad \text{(19) } x > 5, x < 3 \quad \text{(20) כל } x \end{array}$$

### תחום הגדרה:

1 מצא את תחום ההגדרה של הפונקציות הבאות:

$$\begin{array}{ll} \text{א. } f(x) = \sqrt{x} & \text{ב. } f(x) = 2\sqrt{x-3} \\ \text{ג. } f(x) = 3x\sqrt{1-2x} & \text{ד. } f(x) = \frac{5x}{\sqrt{x+4}} \\ \text{ה. } f(x) = \sqrt{x^2+3x-10} & \text{ו. } f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^3-9x}} \\ \text{ז. } f(x) = \frac{x+1}{x-\sqrt{2-x}} & \end{array}$$

### תשובות סופיות:

$$\begin{array}{l} \text{(1) א. } x \geq 0 \quad \text{ב. } x \geq 3 \quad \text{ג. } x \leq \frac{1}{2} \quad \text{ד. } x > -4 \quad \text{ה. } x \geq 2, x \leq -5 \\ \text{ו. } x < -2, -2 < x < 1, 1 < x \leq 2 \quad \text{ז. } -3 < x < 0, x > 3 \end{array}$$



## בעיות קיצון

1. מבין כל זוגות המספרים שההפרש ביניהם 4, מצא את זוג המספרים שסכום ריבועיהם מינימלי.

**תשובה:** 2, -2.

2. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

**תשובה:** 4, 6, 3456.

3. מבין כל שלשות המספרים החיוביים שסכומם  $9a$  ( $a > 0$ ), וש אחד מהם גדול פי שניים מהשני, מצא את המספרים שמכפלתם מקסימלית.

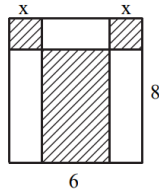
**תשובה:**  $4a$ ,  $2a$ ,  $3a$ .

4. חותכים חוט שאורכו 80 ס"מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

**תשובה:** 40 ס"מ, 40 ס"מ.

5. סכום אורכי האלכסונים במעוין הוא 6 ס"מ. מה צריך להיות אורכו של כל אלכסון כדי ששטח המעוין יהיה מקסימלי?

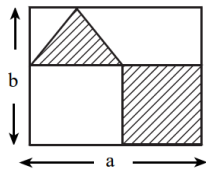
**תשובה:** 3 ס"מ, 3 ס"מ.



6. בחלון מלבני שממדיו 8 מטרים ו-6 מטרים רוצים להרכיב זכוכית משני סוגים: בשטחים המקווקוים המורכבים משני ריבועים שצלעם  $x$  ומלבן נוסף רוצים להרכיב זכוכית צבעונית, ובשטחים הלבנים שבצוור רוצים להרכיב זכוכית שקופה (ראה ציור). א. מה צריך להיות ערכו של  $x$  כדי ששטח הזכוכית השקופה יהיה מקסימלי?

ב. מהו השטח המקסימלי של הזכוכית השקופה?

**תשובה:** א. 2.75 מטר. ב. 30.25 מ"ר.



7. בתוך מלבן שאורכו  $a$  ורוחבו  $b$  חסומים ריבוע ומשולש מקווקוים. מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שסכום השטחים של הריבוע והמשולש יהיה מינימלי? הבע על ידי  $a$  ו- $b$ .

**תשובה:**  $\frac{a+b}{6}$ .