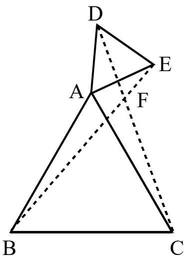
עבודת קיץ – גיאומטריה (5 יחידות)

בעיות עם משולשים ומרובעים (כולל פרופורציה ודמיון)

1. המשולשים ABC ו- ADE הם משולשים שווי-צלעות. הקטעים BE ו- CD נחתכים בנקודה F.



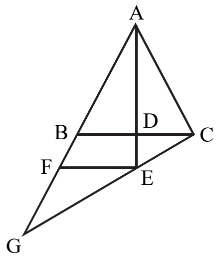
א. הוכח: $BE = CD$.

ב. הוכח: $\measuredangle ACD = \measuredangle ABE$.

ג. חשב את הזווית BFC.

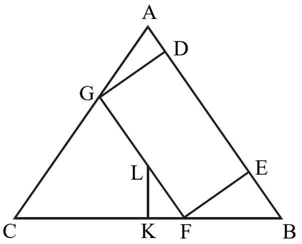
תשובה: ג. 60°.

2. הנקודה D נמצאת על הצלע BC של משולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$.
G היא נקודה על המשך הצלע AB.
הקטע FE מקביל ל- BC.



נתון: $\frac{AG}{AC} = \frac{GF}{BF}$. הוכח: $AE \perp BC$.

3. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AC = AB)$ חסום מלבן $GFED$ (ראה ציור).
נקודה L, הנמצאת על צלע המלבן GF, היא מפגש התיכונים במשולש ABC.
דרך הנקודה L העבירו אנך לצלע BC, החותך את BC בנקודה K.

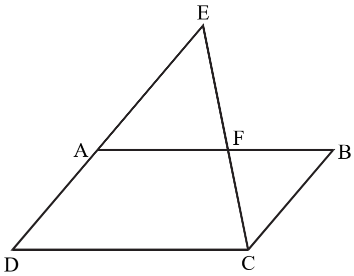


א. הוכח: $\Delta KAB \sim \Delta KLF \sim EFB$.

ב. נתון: $BC = 18$ ס"מ, $AB = 15$ ס"מ.
חשב את אורכי הקטעים KF ו- EF.

תשובה: ב. 3 ס"מ, 4.8 ס"מ.

4. המרובע $ABCD$ הוא מקבילית (ראה ציור).

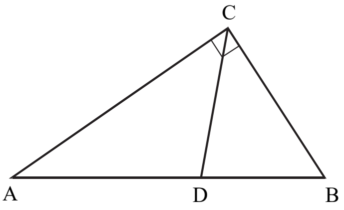


א. הוכח: $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{FA}$.

ב. (1) הוכח: $\frac{S_{\Delta ADF}}{S_{\Delta AEF}} = \frac{AD}{AE}$

(2) היעזר בסעיף א' ובתת סעיף ב' (1), והוכח: $S_{\Delta ADF} = S_{\Delta BEF}$.

5. במשולש ישר-זווית ACB $(\measuredangle ACB = 90^\circ)$ CD חוצה-זווית ACB (ראה ציור).



א. (1) הוכח: $DB \cdot AC = BC \cdot AB - BC \cdot DB$.

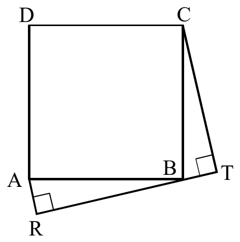
(2) נתון: $BC = 21$ מ"מ, $AC = 28$ מ"מ.
חשב את האורך של הקטע DB.

ב. מקדקוד C מורידים אנך ליתר AB. האנך חותך את היתר בנקודה N. הוכח כי $\frac{BC}{AB} = \frac{CN}{AC}$.

ג. חשב את האורך של הקטע DN.

תשובה: א. **(2)** 15 מ"מ. ג. 2.4 מ"מ.

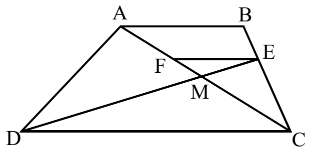
6. נתון ריבוע ABCD.
דרך הקדקוד B העבירו ישר TR.
AR ו- CT מאונכים לישר זה (ראה ציור).
א. הוכח כי $AR + CT = TR$.
ב. הבע את שטח המרובע ACTR באמצעות TR.



תשובה: ב. $\frac{1}{2}(TR)^2$.

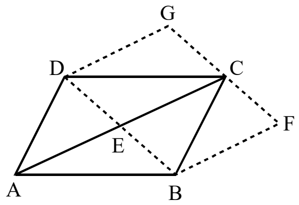
7. הוכח: אורך התיכון במשולש קטן מהממוצע של אורכי שתי הצלעות שלידו. **הדרכה:** הארך את התיכון כאורכו.

8. בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ מתקיים $DC = 2AB$.
הנקודה E נמצאת על השוק BC כך ש- $BC = 3BE$.
הנקודה F נמצאת על האלכסון AC
כך ש- $FE \parallel DC$. האלכסון AC והקטע DE
נחתכים בנקודה M.
א. חשב את היחסים: **(1)** $\frac{FE}{AB}$. **(2)** $\frac{FE}{DC}$.
ב. הוכח: $MC = 3FM$.
ג. חשב את היחס $\frac{AM}{MC}$.

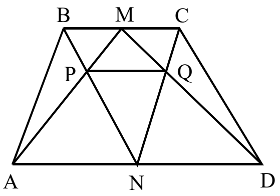


תשובה: א. **(1)** $\frac{2}{3}$. **(2)** $\frac{1}{3}$. ג. $\frac{AM}{MC} = 1$.

9. המרובעים ABCD ו- BFGD הם מקביליות.
נתון: $CG = CF$ (C על הקטע GF).
א. הוכח: המרובע ECGD הוא מקבילית.
ב. הוכח: אם המקבילית ABCD היא מעוין,
אז המרובע ECGD הוא מלבן.

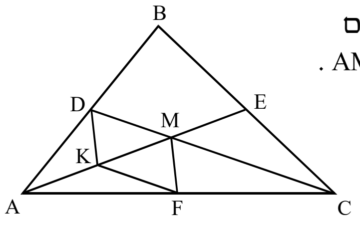


10. בטרפז ABCD $(BC \parallel AD)$ הנקודות M ו- N
הם אמצעי הבסיסים, הקטעים CN ו- DM
נחתכים בנקודה Q, הקטעים AM ו- BN
נחתכים בנקודה P (ראה ציור).
א. הוכח: $PQ \parallel AD$.
ב. נתון גם: $BC = a$, $AD = 2a$.
הבע באמצעות a את אורך הקטע PQ.

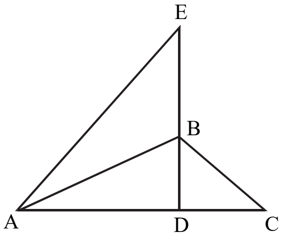


תשובה: ב. $\frac{2}{3}a$.

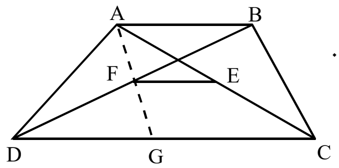
11. התיכונים AE ו- CD במשולש ABC נפגשים
בנקודה M. נקודה K היא אמצע הקטע AM.
F היא נקודה על הצלע AC
כך ש- $KF \parallel DC$ (ראה ציור).
הוכח: המרובע KDMF
הוא מקבילית.



12. במשולש ABC , הגובה לצלע AC הוא BD .
נקודה E נמצאת על המשך הגובה BD ,
כך ש- AB חוצה את הזווית EAC (ראה ציור).
נתון : $\sphericalangle BCA = 2\cdot\sphericalangle BAC$.
א. הוכח : $BC\cdot ED = BD\cdot EA$.
ב. היעזר בנתונים ובסעיף א',
והוכח : $BC\cdot ED = AD\cdot BE$.

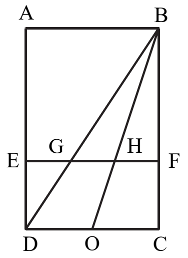


13. בטרפז $ABCD$ $(AB\parallel DC)$ הנקודות E ו- F
הן אמצעי האלכסונים AC ו- BD , בהתאמה.
המשך הקטע AF חותך את DC בנקודה G .
א. הוכח : $FE\parallel DC$.
ב. הוכח : $S_{ADG} = S_{ABD}$.

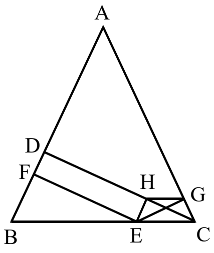


14. הנקודה O היא אמצע הצלע DC של מלבן $ABCD$.
EF מקביל ל- DC וחותך את BD ואת BO
בנקודות G ו- H (ראה ציור).
א. הוכח : $GH = HF$.
ב. נתון גם : $EG = GH$. מצא את היחס $\frac{FC}{BF}$.

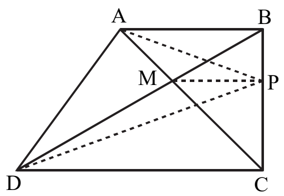
תשובה: ב. $\frac{1}{2}$.



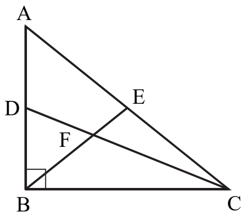
15. במשולש ABC , CD הוא הגובה לצלע AB .
מנקודה E שעל הצלע BC העבירו אנכים
EF ו- EG לצלעות AB ו- AC . הנקודה H
נמצאת על הקטע DC , כך שהמרובע $CEHG$
הוא טרפז שווה-שוקיים $(GH\parallel CE)$.
א. הוכח : $CG = DF$.
ב. הוכח : $AB = AC$.



16. המרובע $ABCD$ הוא טרפז ישר-זווית
$(AB\parallel CD\ ,\ \sphericalangle BCD = 90^\circ)$ שאלכסוניו
נחתכים בנקודה M .
MP מקביל לבסיסים.
א. הוכח : $\frac{AB}{DC} = \frac{BP}{PC}$.
ב. הוכח : $\Delta ABP \sim \Delta DCP$.



17. משולש ABC הוא משולש ישר-זווית
$(\sphericalangle ABC = 90^\circ)$. BE הוא תיכון לצלע AC ,
ו- CD הוא תיכון לצלע AB .
התיכונים BE ו- CD נחתכים בנקודה F .
א. חשב את היחס בין היקף המשולש BFC
להיקף המשולש EFD .
ב. נתון גם כי הנקודה M היא אמצע הקטע FC ,
והנקודה N היא אמצע הקטע FB .
הוכח כי המרובע $DEMN$ הוא מקבילית.



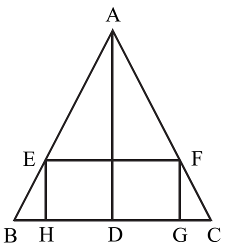
תשובה: א. 2 .

18. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ חסום מלבן EFGH, כך שהאלכסון HF מאונך לשוק AC. AD הוא תיכון לבסיס BC. נתון: $AD = BC$.

א. הוכח: $\frac{GC}{FG} = \frac{1}{2}$.

ב. הוכח: $\Delta HGF \sim \Delta FGC$.

ג. נתון: $HG = 10$ ס"מ. מצא את GC.



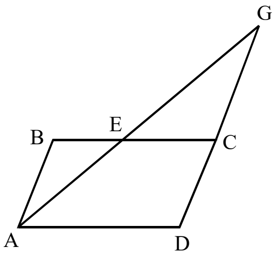
תשובה: ג. 2.5 ס"מ.

19. במקבילית ABCD נקודה E נמצאת על הצלע BC, כך ש- $\frac{BE}{CE} = \frac{a}{b}$. המשך הקטע AE חותך את המשך הצלע DC בנקודה G. נתון כי שטח המשולש CEG הוא S. הבע באמצעות a, b ו- S:

א. את שטח המשולש ABE.

ב. חשב את שטח המשולש ADG.

ג. את שטח המקבילית ABCD.



תשובה: א. $\frac{a^2S}{b^2}$. ב. $\frac{(a+b)^2S}{b^2}$. ג. $\frac{2a(a+b)S}{b^2}$.

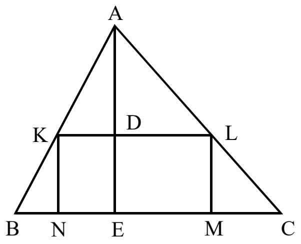
20. במשולש ABC חסום מלבן KLMN. הגובה AE לצלע BC חותך את צלע המלבן KL בנקודה D.

נתון: $BC = 6$ ס"מ, $KL = 2KN$, $AE = h$.

הבע באמצעות h:

א. את אורך הקטע AD.

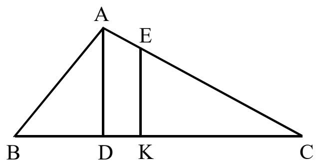
ב. את יחס השטחים: $\frac{S_{AKD}}{S_{KBN}}$.



תשובה: א. $\frac{h^2}{h+3}$. ב. $\frac{h^2}{9}$.

21. מנקודה K שעל הצלע BC במשולש ABC, העלו אנך KE. AD הוא הגובה לצלע BC.

נתון: $BD = 14$ ס"מ, $DC = 36$ ס"מ, ושטח המשולש EKC הוא חצי משטח המשולש ABC. מצא את אורך הקטע CK.



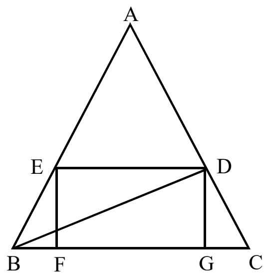
תשובה: 30 ס"מ.

22. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$, חסום מלבן DEFG. BD חוצה את הזווית ABC ומחלק את השוק AC כך ש- $AD:DC = 2:1$. נתון: $BC = 2a$.

בטא באמצעות a:

(1) את אורכי הקטעים AD ו- DC.

(2) את שטח המלבן DEFG.



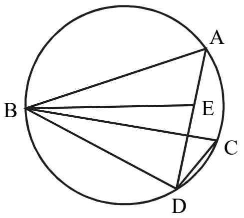
תשובה: (1) $2\frac{2}{3}a$, $1\frac{1}{3}a$. (2) $\frac{4\sqrt{15}}{9}a^2$.

בעיות עם מעגל (כולל פרופורציה ודמיון)

1. A, B, C ו- D הן נקודות על מעגל, כמתואר בציור. E היא נקודה על AD, כך ש- $AE = DC$. נתון: $AB = BC$.

א. הוכח: $\Delta ABE \cong \Delta CBD$.

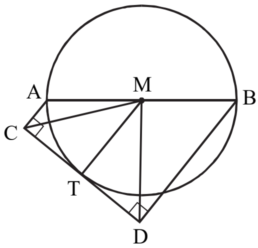
ב. המשך הקטע BE חותך את המעגל בנקודה M. הוכח: $AM = DC$.



2. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו M. הישר CD משיק למעגל בנקודה T. נתון: $BD \perp CD$, $AC \perp CD$.

א. הוכח: $TM = \frac{AC + BD}{2}$.

ב. הוכח: $MC = MD$.

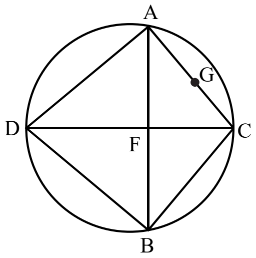


3. A, B, C ו- D הן נקודות על מעגל. המיתרים AB ו- CD נחתכים בנקודה F (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle DAC = \sphericalangle DBC$.

א. הוכח כי DC הוא קוטר.

ב. נתון גם: $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD$. הוכח: $AB \perp CD$.

ג. נקודה G נמצאת על AC כך ש- $GF = AG$. הוכח: $GF = GC$.

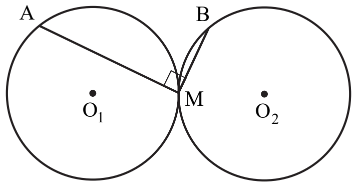


4. שני מעגלים, שיש להם אותו רדיוס R, משיקים זה לזה בנקודה M. מעבירים מיתר MB במעגל שמרכזו O_2, ומיתר MA במעגל שמרכזו O_1 כך ש- $\sphericalangle AMB = 90^\circ$ (ראה ציור).

א. (1) נמק מדוע $\sphericalangle O_1MO_2 = 180^\circ$.

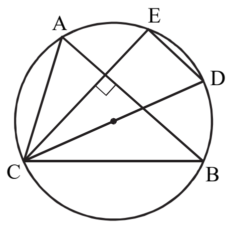
(2) הוכח כי $AO_1 \parallel BO_2$.

ב. במשולש AMB העבירו תיכון לצלע AB. הבע באמצעות R את אורך התיכון. נמק.

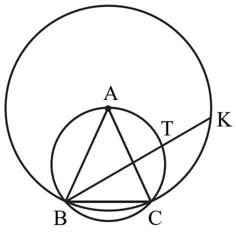


תשובה: ב. R.

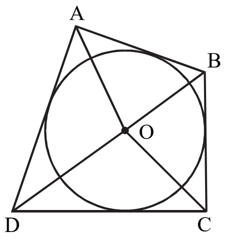
5. המשולש ABC חסום במעגל. הזוויות A ו- B הן חדות. CD הוא קוטר במעגל. נתון: $CE \perp AB$. הוכח: $\sphericalangle ACE = \sphericalangle BCD$.



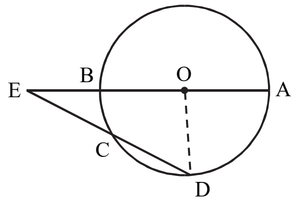
6. המשולש ABC חסום במעגל. מקדקוד A
חגו מעגל נוסף, שבו A הוא מרכז המעגל,
והנקודות B ו- C נמצאות על המעגל.
ישר העובר דרך B חותך את המעגל החוסם
בנקודה T, ואת המעגל האחר בנקודה K.
א. הוכח: $\sphericalangle BTC = 2\sphericalangle BKC$.
ב. הוכח: $TC = TK$.



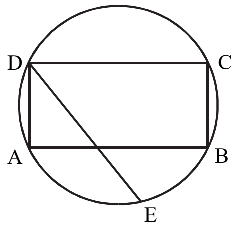
7. בתוך מרובע ABCD חסום מעגל
שמרכזו בנקודה O.
הוכח: $S_{AOB} + S_{DOC} = S_{AOD} + S_{BOC}$.



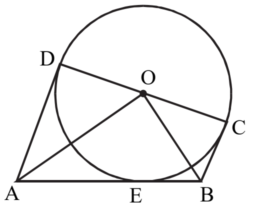
8. במעגל שמרכזו O, המשכי הקוטר AB
והמיתר DC נפגשים בנקודה E.
הוכח: $DE < AE$.



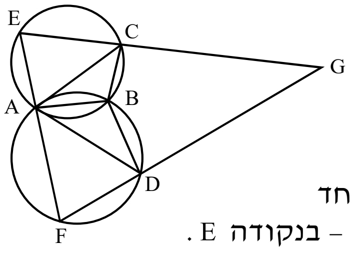
9. מלבן ABCD חסום במעגל.
הנקודה E נמצאת על הקשת AB
כך ש- $DE = DC$ (ראה ציור).
א. הוכח: $EB = BC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle EDB = \sphericalangle DBA$.



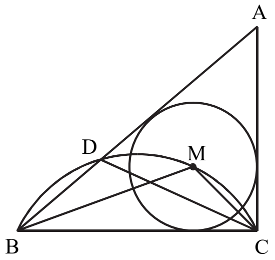
10. CD הוא קוטר המעגל שמרכזו O.
CB משיק למעגל בנקודה C
ו- AD משיק למעגל בנקודה D.
המעגל משיק לקטע AB בנקודה E.
א. הוכח $AD \parallel BC$.
ב. הוכח: $\sphericalangle AOB = 90^\circ$.
ג. הוכח: $AB = AD + BC$.



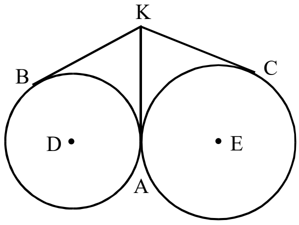
11. שני מעגלים לא שווים חותכים את זה בנקודות A ו- B.
המשיק לאחד המעגלים בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה C.
המשיק למעגל האחר בנקודה A
חותך את המעגל האחר בנקודה D.
א. הוכח: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle ABD$.
ב. ישר העובר דרך הנקודה A חותך את אחד
המעגלים בנקודה F ואת המעגל האחר – בנקודה E.
הישרים EC ו- FD נפגשים בנקודה G.
הוכח: המשולש EFG הוא שווה-שוקיים.



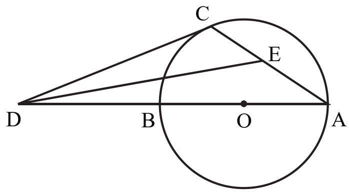
12. המשולש ABC חוסם מעגל שמרכזו M.
המעגל העובר דרך הנקודות C, B ו- M,
חותך את הצלע AB בנקודה D.
נתון: $\sphericalangle A = \alpha$.
א. הוכח: $\sphericalangle BMC = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$.
ב. הוכח: $AD = AC$.



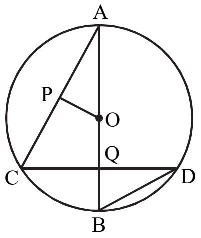
13. המעגלים D ו- E משיקים זה לזה בנקודה A.
הקטע BK משיק למעגל D.
הקטע CK משיק למעגל E.
הקטע AK משיק לשני המעגלים.
א. הוכח: $BK = CK$.
ב. הוכח: הנקודה A נמצאת על הקטע DE.



14. AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O.
המשיק למעגל בנקודה C חותך
את המשך הקוטר AB בנקודה D.
E נקודה על המיתר AC כך ש- DE
חוצה את הזווית ADC.
הוכח: $\sphericalangle DEC = 45^\circ$.

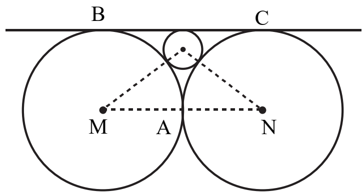


15. AB הוא קוטר במעגל O.
AC ו- CD הם מיתרים שווים במעגל.
נתון: P אמצע המיתר AC,
Q אמצע המיתר CD.
א. הוכח: $\Delta APO \cong \Delta DQB$.
ב. הוכח: $OQ = BQ$.



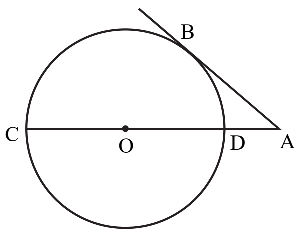
16. שני מעגלים שווים שמרכזיהם M ו- N
ורדיוסם 8 ס"מ, משיקים זה לזה
בנקודה A. הישר BC הוא משיק
משותף לשני המעגלים. מעגל שלישי
משיק לשני המעגלים הנתונים
ולמשיק המשותף להם.
חשב את רדיוס המעגל השלישי.

תשובה: 2 ס"מ.

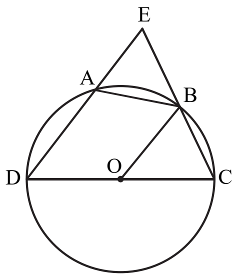


17. נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R.
מנקודה A יוצא ישר המשיק למעגל בנקודה B,
ויוצא ישר החותך את המעגל בנקודות D ו- C.
CD הוא קוטר במעגל. נתון: $AB = \frac{4}{3}R$.
א. הבע את AD באמצעות R. נמק.
ב. מנקודה A יוצא ישר נוסף המשיק
למעגל בנקודה F. הוכח כי $BF \perp AO$.

תשובה: א. $\frac{2R}{3}$.

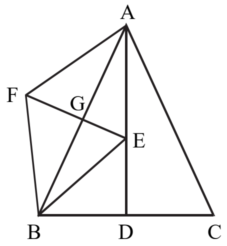


18. במעגל שמרכזו O חסום מרובע ABCD.
DC הוא קוטר. המשכי הצלעות DA ו- CB
נפגשים בנקודה E (ראה ציור).
נתון: $OB \parallel DE$, $\sphericalangle BOC = \alpha$.
א. הבע באמצעות α את $\sphericalangle ABO$.
ב. נתון כי שטח המשולש OBC שווה לשטח
המשולש BEA. הוכח כי $\Delta OBC \cong \Delta BEA$.

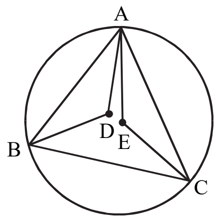


תשובה: א. $90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

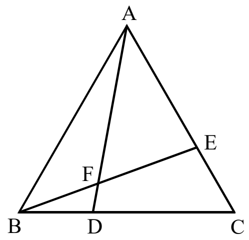
19. AD הוא גובה לבסיס BC במשולש שווה-שוקיים
ABC $(AB = AC)$. E היא נקודה על AD כך
שהמרובע AEBF הוא דלתון $(AF = BF \ , \ AE = BE)$.
א. הוכח: הנקודה E היא מרכז המעגל
החוסם את המשולש ABC.
ב. הוכח: הנקודה G היא מרכז המעגל
החוסם את המשולש ABD.



20. הנקודה D היא מרכז המעגל החסום
במשולש ABC והנקודה E היא מרכז
המעגל החוסם את המשולש ABC.
הוכח: $\sphericalangle AEC = 4 \cdot \sphericalangle ABD$.

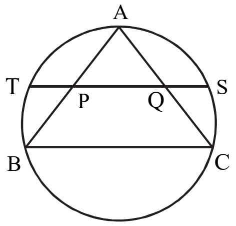


21. המשולש ABC הוא שווה-צלעות. הנקודות D ו- E
נמצאות על הצלעות BC ו- AC כך ש- $DC = AE$.
א. הוכח: $\Delta ACD \cong \Delta BAE$.
ב. חשב את הזווית DFE.
ג. הוכח שהמרובע CDFE בר-חסימה במעגל.
ד. הוכח: $\sphericalangle DFC = \sphericalangle DEC$.

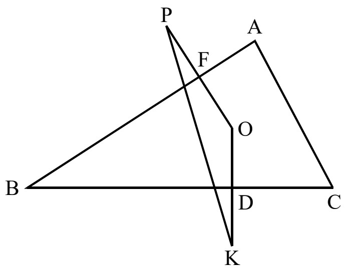


תשובה: ב. 120° .

22. המשולש שווה-השוקיים ABC $(AB = AC)$
חסום במעגל. P ו- Q הן אמצעי השוקיים
AB ו- AC, בהתאמה. המשכי הקטע PQ
חותכים את המעגל בנקודות T ו- S.
א. הוכח: $TB = SC$.
ב. הוכח: $TP = QS$.

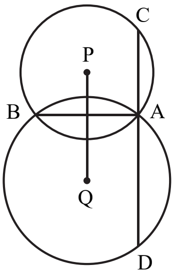


23. הנקודה O היא מרכז המעגל החסום
במשולש ABC. המעגל משיק לצלע BC
בנקודה D ולצלע AB בנקודה F.
המשיכו את OD עד K ואת OF עד P
כך ש- $OD = DK$ ו- $OF = FP$.
א. הוכח כי $FD \perp BO$.
ב. הוכח כי $BO \perp PK$.



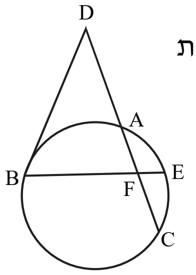
24. א. **הוכח את המשפט:** קטע המרכזים של שני מעגלים נחתכים – חוצה את המיתר המשותף לשני המעגלים ומאונך לו.

ב. בציור מתוארים מעגלים P ו- Q הנחתכים בנקודות A ו- B. דרך A מעבירים ישר החותך את המעגלים P ו- Q בנקודות C ו- D, בהתאמה. נתון: $DC \parallel PQ$. הוכח: BC ו- BD הם קטרים במעגלים P ו- Q.



25. א. **הוכח את המשפט:** זווית חיצונית למעגל שווה למחצית הפרש שתי הקשתות הכלואות בין שוקי הזווית.

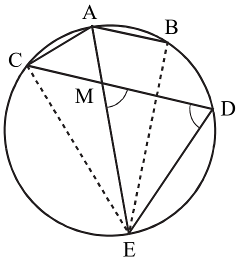
ב. המשיק למעגל בנקודה B חותך את המשך המיתר AC בנקודה D. הנקודה E היא אמצע הקשת AC. AC ו- BE נחתכים בנקודה F. הוכח: $DB = DF$.



26. הנקודות A , B , C , D , E נמצאות על מעגל (ראה ציור). נתון: $AB \parallel CD$, הקשתות CA ו- AB שוות, AE הוא קוטר במעגל, החותך את המיתר CD בנקודה M.

א. הוכח כי $\sphericalangle EMD = \sphericalangle MDE$.

ב. הוכח כי המרובע ABMC הוא מעוין.

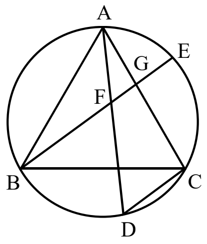


27. ABC הוא משולש שווה-צלעות החסום במעגל. D היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{BC}$, ו- E היא נקודה על הקשת $\overset{\frown}{AC}$ כך ש- DC מקביל ל- BE. BE חותך את AD בנקודה F ואת AC בנקודה G.

א. הוכח: $\sphericalangle ADC = 60^\circ$.

ב. הוכח: המשולש BFD הוא שווה-צלעות.

ג. הוכח שלא קיים מעגל העובר דרך קדקודי המרובע BGCD.

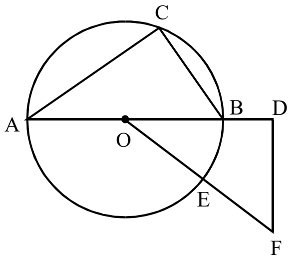


28. המשולש ABC חסום במעגל שמרכזו O. AB הוא קוטר במעגל.

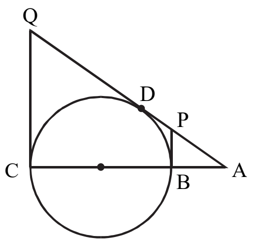
נתון: $\overset{\frown}{BC} = 2\cdot\overset{\frown}{BE}$, $OD \perp DF$.

א. הוכח: $\Delta ACB \sim \Delta ODF$.

ב. נתון: BC = 6 ס"מ , AC = 8 ס"מ , AD = 13 ס"מ. הוכח: $\Delta ACB \cong \Delta ODF$.

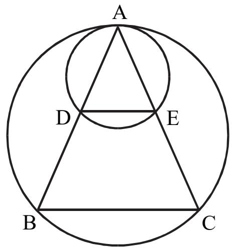


29. CB הוא קוטר של מעגל. CQ משיק למעגל בנקודה C, AQ משיק למעגל בנקודה D ו- BP משיק למעגל בנקודה B.
נתון: $AP = 10$ ס"מ, $AQ = 40$ ס"מ.
חשב את רדיוס המעגל.



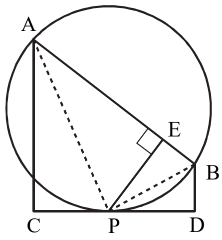
תשובה: 12 ס"מ.

30. שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה A. AB ו- AC הם מיתרים במעגל הגדול החותכים את המעגל הקטן בנקודות D ו- E.
א. הוכח: $DE \parallel BC$.
ב. נתון: $BC = 2.5DE$, $BD = 6$ ס"מ.
חשב את אורך הקטע AD.

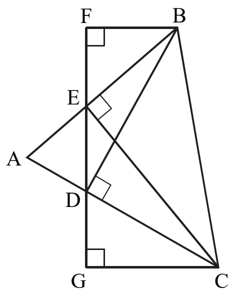


תשובה: ב. 4 ס"מ.

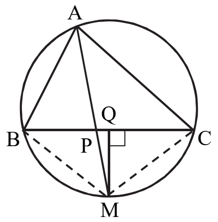
31. CD משיק למעגל בנקודה P, ו- AB הוא מיתר במעגל זה. BD ו- AC הם אנכים למשיק. PE הוא אנך מנקודת ההשקה P למיתר AB.
א. הוכח: $\Delta ACP \sim \Delta PEB$.
ב. הוכח: $\Delta BDP \sim \Delta PEA$.
ג. הוכח: $AC \cdot BD = PE^2$.



32. נתון משולש חד-זוויות ABC. CE הוא גובה לצלע BA, ו- BD הוא גובה לצלע AC.
א. (1) הוכח: המשולש DBC חסום במעגל החוסם את המשולש EBC.
(2) הוכח: $\sphericalangle DBC = \sphericalangle DEC$.
ב. BF ו- CG מאונכים להמשכי הקטע ED, כמתואר בציור.
(1) הוכח: $\Delta DCB \sim \Delta FEB$.
(2) הוכח: $\Delta EBC \sim \Delta GDC$.

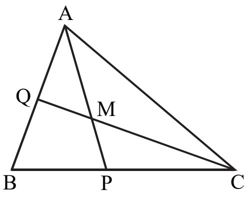


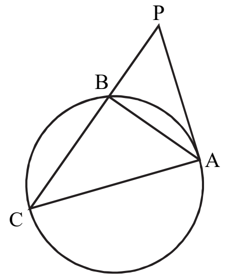
33. המשולש ABC חסום במעגל.
נתון: $MQ \perp BC$, $BM = MC$, $AB = 20$ ס"מ, $AC = 25$ ס"מ, $BC = 36$ ס"מ.
א. חשב את אורך הקטע PQ.
ב. נתון: $S_{BPM} = 96$ סמ"ר. חשב את S_{CPM}.



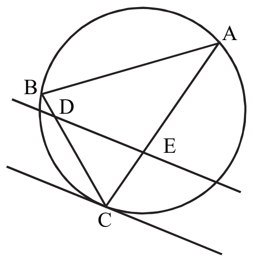
תשובה: א. 2 ס"מ. ב. 120 סמ"ר.

34. בציור שלפניך נתון: $AC = 40$ ס"מ, $PC = 20$ ס"מ, $BP = 15$ ס"מ, $BQ = 14$ ס"מ, $AQ = 16$ ס"מ.
הוכח כי הנקודה M היא מרכז המעגל החסום במשולש ABC.





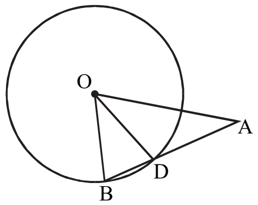
35. PA הוא משיק למעגל ו- PC
חותך את המעגל בנקודות B ו- C .
הוכח : $\frac{PC}{PB}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$.



36. המשולש ABC חסום במעגל. E היא נקודה
על צלע AC . דרך הנקודה E העבירו
מקביל לישר המשיק למעגל בנקודה C .
א. הוכח : $\Delta DEC \sim \Delta ABC$.
ב. נתון : 2 BD = ס"מ , 6 DC = ס"מ , AE = 2EC ,
שטח המשולש ABC הוא S .
הבע באמצעות S את שטח המשולש DEC .

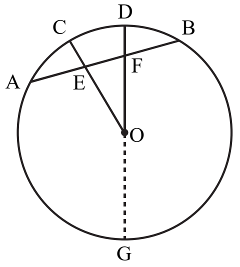
תשובה: $\frac{1}{4}S$.

37. הוכח : הרדיוסים של מעגלים החוסמים משולשים דומים מתייחסים
זה לזה כמו הצלעות המתאימות.

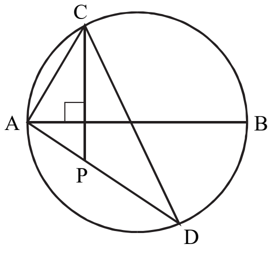


38. המשולש ABO הוא שווה שוקיים (AB = AO) .
הנקודה O היא מרכז המעגל.
א. הוכח : $\Delta BOD \sim \Delta BAO$
ב. נתון : 12 OD = ס"מ , 10 AD = ס"מ .
חשב את היחס בין שטח המשולש BOD
לשטח המשולש AOD .

תשובה: ב. 4 : 5 .



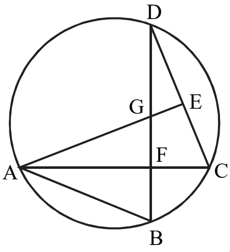
39. AB הוא מיתר במעגל שמרכזו O . הנקודות C ו- D
נמצאות על הקשת $\overset{\frown}{AB}$ כך ש- $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DB}$.
OC ו- OD חותכים את AB בנקודות E ו- F
בהתאמה (ראה ציור).
א. הוכח כי $\Delta AEO \cong \Delta BFO$
ב. (1) נמק מדוע $\frac{AE}{FE}=\frac{AO}{FO}$. (2) הוכח כי $\frac{AE}{FE}>1$.



40. AB הוא קוטר במעגל. CP מאונך לקוטר AB .
א. הוכח : $AC^2 = AP \cdot AD$.
ב. נתון : 18 AP = ס"מ , 32 AD = ס"מ ,
40 CD = ס"מ .
הוכח שהמשולש DAC הוא ישר-זווית.
ג. חשב את רדיוס המעגל.

תשובה: ג. 20 ס"מ.

.41 A , B , C ו- D הן נקודות על מעגל. AC ו- BD נחתכים בנקודה F . G היא נקודה על BD כך ש- $AG = AB$. המשך AG חותך את DC בנקודה E . נתון: $BF = GF$.

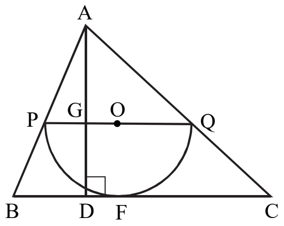


א. הוכח: $\Delta AEC \sim \Delta DFC$.

ב. נתון: $EC = a$, $DF = c$, $AE = m$.
הבע את שטח המשולש DFC באמצעות a , c ו- m .

תשובה: ב. $\frac{ac^2}{2m}$.

.42 במשולש ABC חסום חצי מעגל שמרכזו O . F – נקודת השקה. הקוטר PQ של חצי המעגל מקביל לצלע BC . AD הוא הגובה לצלע BC .
נתון: $BC = 20$ ס"מ, $AD = 15$ ס"מ .

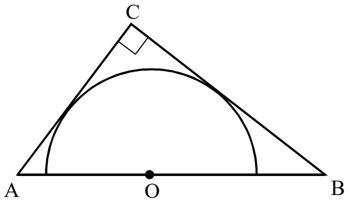


א. הוכח: $\frac{AG}{AD} = \frac{PQ}{BC}$.

ב. חשב את רדיוס חצי המעגל.

תשובה: ב. 6 ס"מ.

.43 במשולש ישר זווית ACB $(\sphericalangle ACB = 90^\circ)$ חסום חצי מעגל שמרכזו O . קוטר המעגל מונח על היתר של המשולש.



א. הוכח כי הקטע CO , המחבר את מרכז המעגל עם נקודת המוצא C של שני משיקים למעגל (CA ו- CB), חוצה את הזווית שבין שני המשיקים.

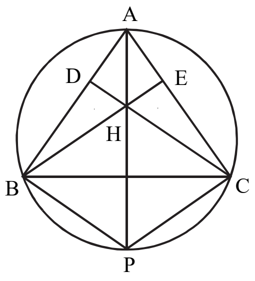
ב. נתון: $AO = 6$ ס"מ , $BO = 8$ ס"מ .

(1) היעזר בסעיף א' וחשב את היחס $\frac{AC}{BC}$.

(2) חשב את אורכי הניצבים AC ו- BC .

תשובה: ב. (1) $\frac{3}{4}$. (2) 8.4 ס"מ, 11.2 ס"מ.

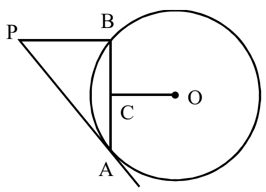
.44 המשולש ABC חסום במעגל. AP הוא קוטר במעגל. BE הוא גובה לצלע AC ו- CD הוא גובה לצלע AB . BE ו- CD נחתכים בנקודה H שעל הקוטר AP .



א. הוכח שהמרובע BHCP הוא מעוין.

ב. הוכח: $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$.

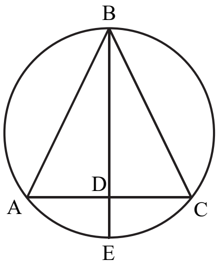
.45 נתון מעגל שמרכזו O ורדיוסו R .
PA הוא משיק למעגל בנקודה A .
AB הוא מיתר במעגל. C היא אמצע המיתר AB . נתון: $PB \perp AB$.



א. הוכח: $2 \cdot (AC)^2 = OC \cdot BP$.

ב. הוכח: $2 \cdot (OC)^2 + OC \cdot BP = 2R^2$.

.46 הנקודות E , C , B , A נמצאות על מעגל (ראה ציור). BE חוצה את הזווית ABC וחותך את המיתר AC בנקודה D .



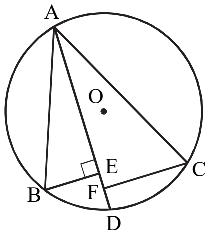
א. הוכח כי $\Delta ABE \sim \Delta DAE$
ו- $\Delta ABE \sim \Delta DBC$.

ב. נתון: $AB = BC$.
הוכח כי BE הוא קוטר במעגל.

ג. נתון: $R = 25$ ס"מ ו- $\frac{BD}{DE} = \frac{16}{9}$. מצא את שטח המשולש ABC .

תשובה: ג. 768 סמ"ר.

.47 הנקודות A , B , C מונחות על מעגל כך ש- $AB < AC$.
הקשת BD שווה לקשת DC ($\overset{\frown}{DB} = \overset{\frown}{DC}$).
הנקודות E ו- F מונחות על המיתר AD ,
כך ש- $BE \perp AD$, $CF \perp AD$.

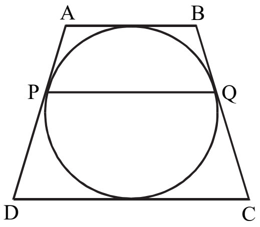


א. הוכח: $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$.

ב. הוכח: $\frac{S_{ABE}}{S_{ACF}} < 1$.

ב. הוכח: $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} < 1$.

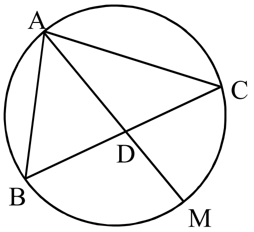
.48 $ABCD$ הוא טרפז שווה-שוקיים החוסם מעגל.
אורכי הבסיסים של הטרפז הם a ו- b .
שוקי הטרפז משיקות למעגל בנקודות P ו- Q .



א. הוכח: $PQ \parallel DC$.

ב. הוכח: $\frac{1}{PQ} = \frac{1}{2a} + \frac{1}{2b}$.

.49 משולש ABC חסום במעגל. המיתר AM חותך את הצלע BC בנקודה D .



א. הוכח: $\Delta ADC \sim \Delta BDM$.

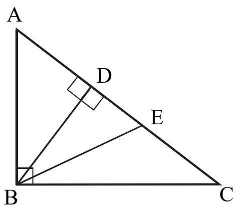
ב. הוכח: $\Delta ADB \sim \Delta CDM$.

ג. נתון: $AB \cdot BM = AC \cdot CM$.
הוכח: $BD = DC$.

טריגונומטריה במישור (5 יחידות)

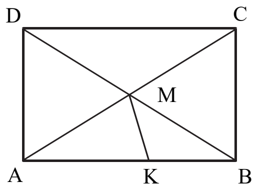
הערה: התרגילים כוללים שימוש בפונקציות סינוס, קוסינוס וטנגנס במשולש ישר-זווית, ושימוש במשפט הסינוסים ומשפט הקוסינוסים.

1. במשולש ישר-זווית ABC נתון: $AB = 6$ ס"מ, $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $\sphericalangle BAC = \alpha$. BD הוא גובה ליתר. BE הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle DBC$.
הבע את אורך הקטע EC באמצעות α.



תשובה: $6\sin\alpha(\tan\alpha - \tan\frac{\alpha}{2})$.

2. במלבן ABCD נתון: $AB = 8.4$ ס"מ, $AC = 10$ ס"מ, $AM = AK$.
חשב את אורך הקטע MK.



תשובה: 2.828 ס"מ.

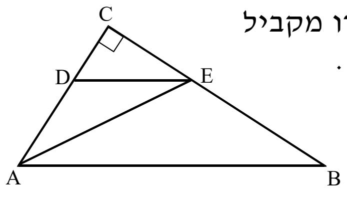
3. נתון משולש ששטחו 35 סמ"ר. אורכי שתיים מצלעותיו הם 10 ס"מ ו- 8 ס"מ. חשב את אורך הצלע השלישית של המשולש.
רשום את שתי האפשרויות.

תשובה: 9.303 ס"מ או 15.54 ס"מ.

4. היקפו של משולש ABC הוא 40 ס"מ. הצלע BC גדולה ב- 6 ס"מ מהצלע AB. נתון: $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. חשב את אורכי צלעותיו של המשולש.

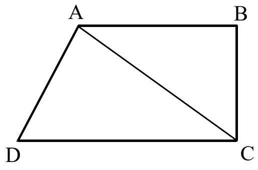
תשובה: 16 ס"מ, 10 ס"מ, 14 ס"מ.

5. במשולש ישר-זווית ABC ($\sphericalangle C = 90^\circ$) העבירו מקביל ליתר, החותך את הניצבים בנקודות D ו- E.
נתון: $DE = m$, $\sphericalangle ABE = \alpha$, $\sphericalangle DAE = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α
את אורכי הקטעים AB ו- BE.



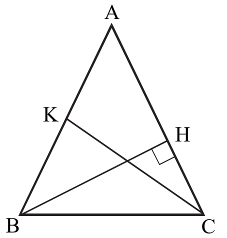
תשובה: $\frac{m\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$, $\frac{m\cos\alpha\sin 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

6. ABCD הוא טרפז ישר-זווית ($AB \parallel CD$, $BC \perp DC$).
נתון: $\sphericalangle ACD = \alpha$, $AC = CD$.
א. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ACD לשטח המשולש ABC.
ב. חשב את היחס הנ"ל כאשר $\alpha = 60^\circ$.



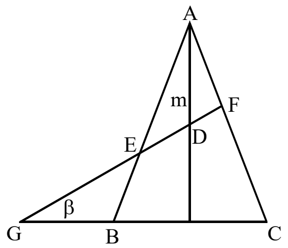
תשובה: א. $\frac{1}{\cos\alpha}$. ב. 2.

7. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ שווה אורך הבסיס ל- a, והזווית שלידו ל- β $(\beta > 45^\circ)$.
BH הוא גובה לשוק AC ו- CK תיכון לשוק AB.
הבע באמצעות a ו- β:
א. את אורך הקטע AH.
ב. את שטח המשולש AKH.



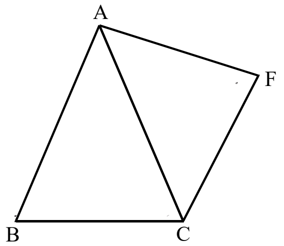
תשובה: א. $\frac{-a\sin\beta\cos2\beta}{\sin2\beta} = a\sin\beta\tan(2\beta-90^\circ)$. ב. $\frac{-a^2\sin^2\beta\cos2\beta}{4\sin2\beta}$.

8. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ זווית הראש היא 2α. דרך הנקודה D, הנמצאת על הגובה לבסיס במרחק m מהקדקוד A העבירו ישר היוצר זווית β עם הישר BC. ישר זה חותך את שוקי המשולש בנקודות E ו- F. הבע את שטח המשולש AEF באמצעות m, α ו- β.



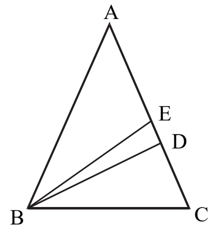
תשובה: $\frac{m^2\sin2\alpha\cos^2\beta}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

9. במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$ בנו על השוק AC משולש שווה-שוקיים AFC כך ש- $AF = CF = BC = a$.
נסמן: $\sphericalangle ABC = \alpha$, $\sphericalangle AFC = \beta$.
א. (1) הבע את האורך של השוק AC באמצעות a ו- α.
(2) הוכח כי $\cos\beta = 1 - \frac{1}{8\cos^2\alpha}$.
ב. נתון כי משולש AFC הוא ישר-זווית.
מצא את הזוויות במשולש ABC.



תשובה: א. (1) $\frac{a\sin\alpha}{\sin2\alpha} = \frac{a}{2\cos\alpha}$. ב. 69.295°, 69.295°, 41.41°.

10. המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$.
BD הוא הגובה לשוק ו- BE הוא חוצה זווית של $\sphericalangle ABC$. נתון: $\sphericalangle BAC = 2\alpha$ $(\alpha < 30^\circ)$,
$AB = AC = 10$ ס"מ.
א. הבע באמצעות α את שטח המשולש BDE.
ב. הצב $\alpha = 30^\circ$ בביטוי שקיבלת בסעיף א'.
הסבר את התוצאה שקיבלת.



תשובה: א. $50\sin^2 2\alpha\tan(45^\circ - 1\frac{1}{2}\alpha)$. ב. 0.

.11 המשולש ABC הוא שווה-שוקיים $(AB = AC)$. AD הוא גובה לבסיס BC ו- CE הוא גובה לשוק AB. שני הגבהים נחתכים בנקודה O.

נתון: $\sphericalangle ABC = \alpha$ $(\alpha > 45^\circ)$.

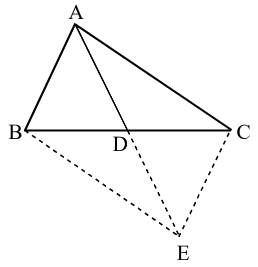
א. הבע את היחס $\frac{AO}{DO}$ באמצעות α.

ב. הצב $\alpha = 60^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת.

ג. הצב $\alpha = 45^\circ$ ביחס של סעיף א', והסבר את התוצאה המתקבלת.

תשובה: א. $\tan^2\alpha - 1$. ב. $\frac{AO}{DO} = 2$, נקודה D היא נקודת מפגש התיכונים.

ג. $\frac{AO}{DO} = 0$, כלומר $AO = 0$. O ו- A מתלכדות.



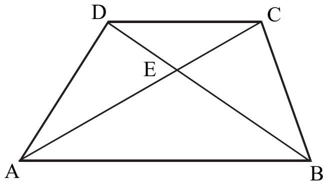
.12 AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.

נתון: $AC = 12$ ס"מ, $\sphericalangle BAD = 42^\circ$,

$\sphericalangle DAC = 36^\circ$. חשב את אורך התיכון AD.

הדרכה: הארך את התיכון AD כאורכו כך שתיווצר מקבילית ABEC.

תשובה: 8.771 ס"מ.



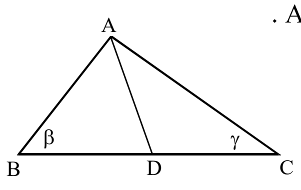
.13 בטרפז ABCD $(AB \parallel DC)$ E היא נקודת החיתוך של האלכסונים.

נתון: $DC = BC$, $BE = k$, $\sphericalangle AEB = \alpha$,

$\sphericalangle CBD = \beta$ (ראה ציור).

הבע באמצעות k, α ו- β את אורך בסיסי הטרפז DC ו- AB

תשובה: $\frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$, $\frac{k\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$.

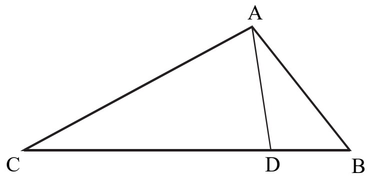


.14 AD הוא חוצה-הזווית של $\sphericalangle BAC$ במשולש ABC.

נתון: $\sphericalangle B = \beta$, $\sphericalangle C = \gamma$.

א. הוכח: $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$. ב. הוכח: $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$.

ג. הוכח: אם $S_{ABD} = S_{ADC}$, אז $AD \perp BC$.



.15 D היא נקודה על הצלע CB במשולש ABC.

נתון: $\sphericalangle CAD = \alpha$, $\sphericalangle DAB = 20^\circ$,

$AC = 7$ ס"מ, $AB = 5$ ס"מ.

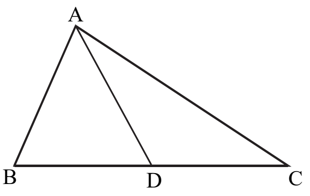
א. הבע באמצעות α את היחס שבין שטח המשולש ADC לשטח המשולש ADB.

ב. מצא את α כאשר שטחי המשולשים שווים.

ג. בעבור איזה ערך של α יחס השטחים הנ"ל הוא הגדול ביותר?

תשובה: א. $\frac{7\sin\alpha}{5\sin 20^\circ}$. ב. 14.14°. ג. 90°.

16. AD הוא התיכון לצלע BC במשולש ABC.
נתון: 7 ס"מ $= AC$, 8 ס"מ $= BC$,
$AB = AD$. חשב את הזווית C
ואת אורך הצלע AB.

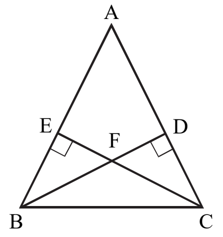


תשובה: 31°, 4.123 ס"מ.

בעיות המשלבות גיאומטריה וטריגונומטריה

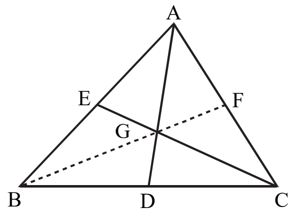
השאלות הבאות משלבות ידע מגיאומטריה וטריגונומטריה.

1. במשולש ABC, BD ו- CE הם גבהים
לצלעות AC ו- AB. נתון: $BD = CE$.
א. הוכח: המשולש ABC הוא שווה-שוקיים.
ב. נתון: 8 ס"מ $= CE$, 5 ס"מ $= DC$.
חשב את הזווית BAC.



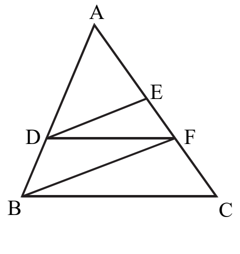
תשובה: ב. 64.01°.

2. הנקודות D ו- E הן אמצעי הצלעות BC ו- AB
של משולש ABC. AD ו- CE נחתכים
בנקודה G. המשך הקטע BG חותך
את הצלע AC בנקודה F.
א. הוכח: $AF = CF$.
ב. נתון: 6 ס"מ $= AC$, $\sphericalangle ABF = 30^\circ$,
$\sphericalangle BAC = 70^\circ$. חשב את אורך הצלע AB.



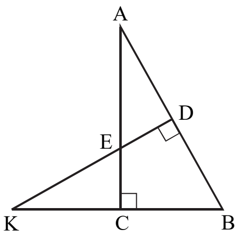
תשובה: ב. 45.58°.

3. בציור שלפניך נתון: $DF \parallel BC$, $DE \parallel BF$,
8 ס"מ $= AD$, 9 ס"מ $= BF$,
6 ס"מ $= DE$, 13 ס"מ $= BC$.
א. חשב את אורך הקטע DF.
ב. חשב את הזווית DBF.



תשובה: א. $8\frac{2}{3}$ ס"מ. ב. 72.3°.

4. המשולש ABC הוא ישר-זווית $(\sphericalangle C = 90^\circ)$.
האנך האמצעי ליתר AB חותך את היתר
בנקודה D, את הניצב AC בנקודה E
ואת המשך הניצב BC בנקודה K.
א. הוכח: $\Delta AED \sim \Delta KBD$.
ב. נתון: $DE = a$, $KE = 3a$.
חשב את הזווית B.

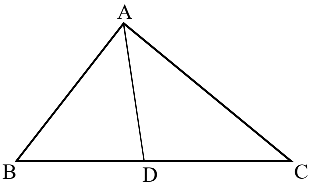


תשובה: ב. 63.43°.

.5 AD הוא חוצה-זווית A במשולש ABC (ראה ציור). נתון: $\sphericalangle BAC = 50^\circ$, $BD = 4$ ס"מ, $DC = 5$ ס"מ.

א. מצא את היחס בין הצלע AC לצלע AB.

ב. מצא את אורך הצלע AB.



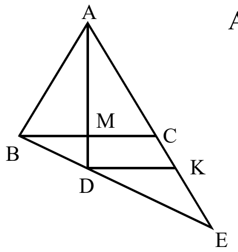
תשובה: א. $5:4$. ב. 9.207 ס"מ.

.6 AM הוא התיכון לבסיס במשולש שווה-שוקיים ABC $(AB = AC)$. E נקודה על המשך הצלע AC. המשך התיכון AM חותך את הקטע BE בנקודה D. הקטע DK מקביל ל- BC.

א. הוכח: $\frac{AB}{AE} = \frac{CK}{EK}$.

ב. נתון: $AB = 8$ ס"מ, $CK = 2$ ס"מ. חשב את אורך הקטע EK.

ג. נתון גם: $\sphericalangle ABE = 82^\circ$. חשב את הזווית BAC.



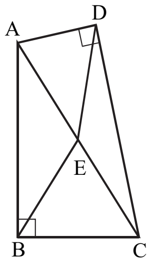
תשובה: ב. $3\frac{1}{3}$ ס"מ. ג. 61.55°.

.7 במרובע $ABCD$ נתון: $AD \perp DC$, $AB \perp BC$. נקודה E היא אמצע האלכסון AC.

א. הוכח: $BE = DE$.

ב. נתון: $\sphericalangle BCD = 74^\circ$. חשב את הזווית BED.

ג. נסמן: $\sphericalangle BCE = \alpha$. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש ADE לשטח המשולש ABE.



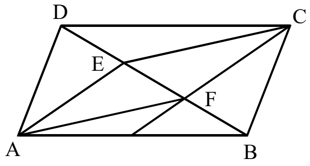
תשובה: ב. 148°. ג. $\frac{\sin(148^\circ - 2\alpha)}{\sin 2\alpha}$.

.8 המרובע $ABCD$ הוא מקבילית. הקטעים AE ו- CF הם חוצי זוויות המקבילית – $\sphericalangle DAB$ ו- $\sphericalangle DCB$, בהתאמה.

א. הוכח: המרובע $AECF$ הוא מקבילית.

ב. נתון: $AB = 2BC$. הוכח: המשך הקטע CF חוצה את צלע המקבילית AB.

ג. נתון גם: $BD = 0.8DC$. חשב את הזווית החדה של המקבילית $ABCD$.



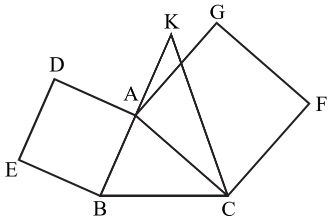
תשובה: ג. 52.41°.

.9 על AB ועל AC, צלעות המשולש ABC בנו ריבועים כמתואר. הנקודה K נמצאת על המשך הצלע AB, ומתקיים: $AB = AK$.

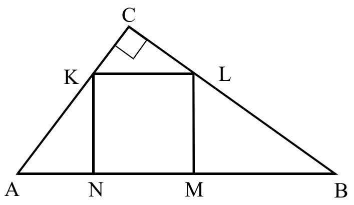
א. הוכח: (1) $\Delta DAG \cong \Delta KAC$.

(2) $S_{ABC} = S_{DAG}$.

ב. נתון: $\sphericalangle ACB = 45^\circ$. הוכח: $S_{ABC} = S_{BCF}$.

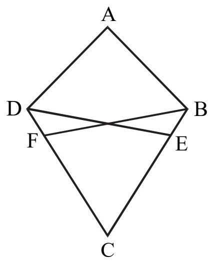


.10 ABC הוא משולש ישר-זווית ($AC \perp BC$).
KLMN הוא ריבוע החסום במשולש.
נתון: $AN = 4$ ס"מ, $MB = 9$ ס"מ.
א. חשב את צלע הריבוע.
ב. חשב את הזווית CKL.



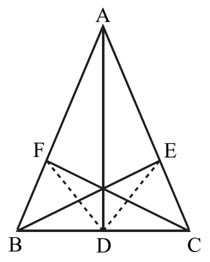
תשובה: א. 6 ס"מ. ב. 56.31°.

.11 המרובע ABCD הוא דלתון ($AB = AD$, $BC = DC$).
DE חוצה את הזווית ADC
ו- BF חוצה את הזווית ABC.
א. הוכח: המרובע BDFE
הוא טרפז שווה-שוקיים.
ב. נתון: $DE = m$, $\sphericalangle DBF = \alpha$.
הבע באמצעות m ו- α את שטח הטרפז BDFE.



תשובה: ב. $\frac{m^2 \sin 2\alpha}{2}$.

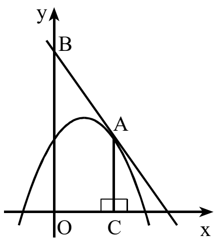
.12 AD, BE ו- CF הם הגבהים של משולש
שווה-שוקיים ABC ($AB = AC$).
א. הוכח: $DE = DF$.
ב. נתון: $\sphericalangle ACB = \alpha$ ($\alpha > 45^\circ$).
הבע באמצעות α את הזווית FDE.
ג. נתון גם: $BC = 2a$.
הבע באמצעות a ו- α את שטח המשולש DEF.



תשובה: ב. $4\alpha - 180^\circ$. ג. $\frac{a^2 \sin(4\alpha - 180^\circ)}{2}$.

חשבון דיפרנציאלי – פולינומים (5 יחידות)

1. לגרף הפונקציה $y=-x^2+2x+3$ מעבירים משיק בנקודה $A(2;3)$. המשיק חותך את ציר ה- y בנקודה B. מנקודה A מורידים אנך AC לציר ה- x. חשב את שטח הטרפז $ABOC$ (O - ראשית הצירים).



תשובה: 10.

2. הישר $y=2x+4$ משיק לגרף הפונקציה $f(x)=x^2+8x+c$.
מצא את ערכו של c.

תשובה: 13.

3. לגרף הפונקציה $y=x^4-16x+2a$ מעבירים משיק בנקודה שבה $y=4$.
שיפוע המשיק הוא 16. מצא את הפרמטר a.

תשובה: 10.

4. הנקודות A ו- B נמצאות על גרף הפונקציה $y=x^3-7x+1$,
כך ששיעור ה- x בנקודה A גדול ב- 4 משיעור ה- x בנקודה B.
ידוע כי המשיקים לפונקציה בנקודות A ו- B מקבילים זה לזה.
מצא את שיעורי הנקודות A ו- B.

תשובה: $A(2;-5)$, $B(-2;7)$.

5. נתונה פונקציה $y=x^2-5x+11$ ונתונה נקודה $(0;-5)$ הנמצאת **מחוץ** לגרף הפונקציה. דרך הנקודה הנתונה מעבירים משיקים לפונקציה הנתונה.
מצא את נקודות ההשקה ואת משוואות המשיקים.

תשובה: $(4;7)$ $y=3x-5$, $(-4;47)$ $y=-13x-5$.

6. גרף הפונקציה $y=2x^2-ax+8$ $(a>0)$ משיק לציר ה- x.
מצא את a ואת שיעורי נקודת ההשקה.

תשובה: $a=8$, $(2;0)$.

חקור את הפונקציות הבאות על פי הסעיפים הבאים ומצא:
א. תחום הגדרה. ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט את גרף הפונקציה.

7. $y=x(12-x^2)$

8. $y=x^4-18x^2+32$

9. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3+15x^2-63x+49$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון,
תחומי עלייה וירידה, נקודת חיתוך עם ציר ה- y.
ב. הראה שאחת מנקודות החיתוך של הפונקציה עם ציר ה- x היא $(1;0)$.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. כמה נקודות משותפות יש לגרף הפונקציה ולציר ה- x?

10. חקור את הפונקציה $y=3x^4-8x^3+6x^2$ ומצא: א. תחום הגדרה.
ב. נקודות מינימום ומקסימום. ג. תחומי עלייה וירידה.
ד. נקודות חיתוך עם הצירים. ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

11. נתונה הפונקציה $y=x^4-4x^2$.
א. חקור את הפונקציה ומצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, נקודות חיתוך עם הצירים.
ב. מצא את תחומי החיוביות והשליליות של הפונקציה.
ג. מצא לאילו ערכים של k, הפונקציה חותכת את הישר $y=k$:
(1) ב- 4 נקודות. **(2)** ב- 3 נקודות. **(3)** ב- 2 נקודות. **(4)** באף נקודה.

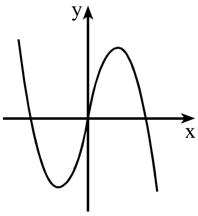
12. לפונקציה $f(x)=-\frac{x^3}{3}-x^2+mx+10$ יש נקודת קיצון ב- $x=1$.
א. מצא את m .
ב. מצא את נקודות המקסימום והמינימום של הפונקציה, ושרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצא כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)-13=0$.

13. גרף הפונקציה $y=x^2-(a+7)x+4a+12$ חותך את ציר ה- x בשתי נקודות $(a>1)$. שיפוע המשיק לגרף בנקודת החיתוך הימנית מבין השתיים שווה ל- 9. מצא את a .

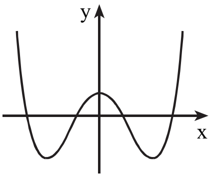
14. נתונה הפונקציה $y=-x^3+3ax$, $a>0$.
א. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים (במידת הצורך, הבע תשובותיך באמצעות a).
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. לאילו ערכים של k חותך הישר $y=k$ את גרף הפונקציה (הבע באמצעות a):
(1) בנקודה אחת. **(2)** בשתי נקודות. **(3)** בשלוש נקודות.

תשובות:

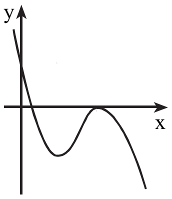
7. א. כל x .
ב. $(2;16)$ מקסימום, $(-2;-16)$ מינימום.
ג. עלייה: $-2<x<2$,
ירידה: $x>2$ או $x<-2$.
ד. $(0;0)$, $(3.464;0)$, $(-3.464.0)$.



8. א. כל x .
ב. $(3;-49)$ מינימום, $(0;32)$ מקסימום, $(-3;-49)$ מינימום.
ג. עלייה: $x>3$ או $-3<x<0$.
ירידה: $0<x<3$ או $x<-3$.
ד. $(0;32)$, $(4;0)$, $(-4;0)$, $(\sqrt{2};0)$, $(-\sqrt{2};0)$.



9. א. תחום הגדרה: כל x.



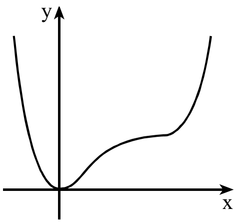
נקודות קיצון: $(3;-32)$ מינימום,

$(7;0)$ מקסימום.

עלייה: $3<x<7$; ירידה: $x>7$ או $x<3$.

נקודת חיתוך: $(0;49)$.

ד. בשתי נקודות.



10. א. כל x.

ב. $(0;0)$ מינימום.

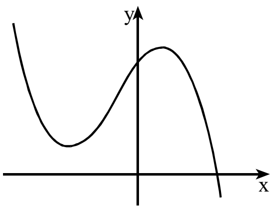
ג. עלייה: $x>0$, ירידה: $x<0$.

ד. $(0;0)$.

11. א. תחום הגדרה: כל x. נקודות קיצון: $(\sqrt{2};-4)$ מינימום, $(0;0)$ מקסימום, $(-\sqrt{2};-4)$ מינימום. נקודות חיתוך: $(2;0)$, $(0;0)$, $(-2;0)$.

ב. חיוביות: $x>2$ או $x<-2$, שליליות: $-2<x<2$, $x\neq 0$.

ג. **(1)** $-4<k<0$. **(2)** $k=0$. **(3)** $k>0$ או $k=-4$. **(4)** $k<-4$.



12. א. 3.

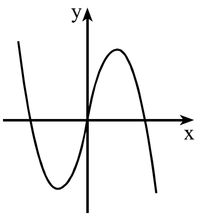
ב. $(1;11\frac{2}{3})$ מקסימום, $(-3;1)$ מינימום.

ג. פתרון אחד.

13. 10.

14. א. תחום הגדרה: כל x. נקודות קיצון: $(\sqrt{a};2a\sqrt{a})$ מקסימום,

$(-\sqrt{a};-2a\sqrt{a})$ מינימום.



תחומי עלייה: $-\sqrt{a}<x<\sqrt{a}$,

תחומי ירידה: $x>\sqrt{a}$ או $x<-\sqrt{a}$.

נקודות חיתוך: $(0;0)$, $(\sqrt{3a};0)$, $(-\sqrt{3a};0)$.

ג. **(1)** $k>2a\sqrt{a}$ או $k<-2a\sqrt{a}$. **(2)** $k=2a\sqrt{a}$

או $k=-2a\sqrt{a}$. **(3)** $-2a\sqrt{a}<k<2a\sqrt{a}$.

15. הפונקציה $y=x^3-15x^2+48x-3$ מוגדרת בקטע $[0,11]$.

א. מצא את הערך הגדול ביותר ואת הערך הקטן ביותר של הפונקציה.

ב. הסבר מדוע גרף הפונקציה חותך את ציר ה- x בשלוש נקודות שונות.

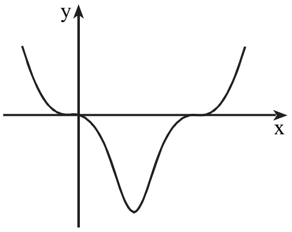
תשובה: א. 41, -67.

16. לגרף הפונקציה $y=(3x-2)^5$ מעבירים שני משיקים ששיפועיהם 15.
מצא את משוואות המשיקים.

תשובה: $y=15x-14$, $y=15x-6$.

17. מצא עבור הפונקציה $y=(x^2-6x)^3$:
א. נקודות מינימום ומקסימום. ב. תחומי עלייה וירידה.
ג. נקודות חיתוך עם הצירים. ד. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

17. א. $(3;-729)$ מינימום.
ב. עלייה: $x>3$, ירידה: $x<3$.
ג. א. $(0;0)$, $(6;0)$.

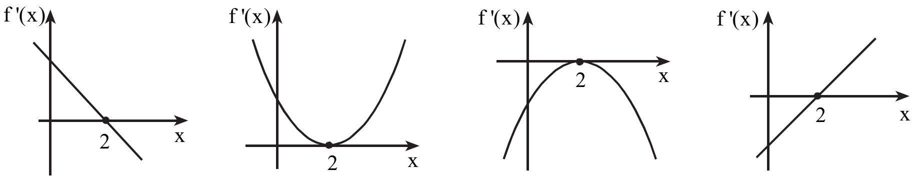


18. לגרף הפונקציה $y=(x-2)^3(6-x)^4$ מעבירים משיק בנקודה $x=4$.
א. חשב את שיפוע המשיק. ב. מצא את משוואת המשיק.

תשובה: א. -64 . ב. $y=-64x+384$.

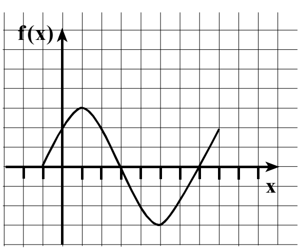
19. נתונה הפונקציה $f(x)=10\frac{2}{3}x^3-2a^2x+a^2$, $a>0$.
א. הבע באמצעות a את נקודת החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה- y .
ב. (1) הבע באמצעות a את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
(2) באיזה רביע נמצאת נקודת המקסימום של הפונקציה? נמק.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה, כאשר למשוואה $f(x)=0$ יש:
(1) פתרון אחד. (2) שני פתרונות. (3) שלושה פתרונות.
ד. היעזר בסעיפים הקודמים ומצא עבור אילו ערכי a למשוואה $f(x)=0$ יש: (1) שני פתרונות. (2) פתרון אחד. (3) שלושה פתרונות.

20. לפונקציה $f(x)$ יש רק נקודת קיצון אחת והיא נקודת מקסימום ב- $x=2$.
א. מהו הסימן של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ עבור $x<2$?
ב. איזה מן הגרפים הבאים (1, 2, 3, 4) יכול לתאר את גרף הנגזרת $f'(x)$ של הפונקציה $f(x)$? נמק את בחירתך.

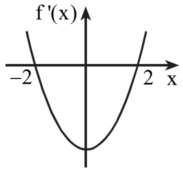


גרף 1 גרף 2 גרף 3 גרף 4

21. לפניך גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $-1\le x\le 8$. נתון: $f'(-1)=4$.
א. שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $-1\le x\le 8$.
ב. נתון: $f'(0)=f(0)$. מצא את משוואת המשיק לפונקציה $f(x)$ בנקודה $x=0$.



22. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.

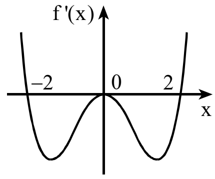


א. מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

ב. מצא את שיעורי ה- x של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$ וקבע את סוג הקיצון.

ג. נתון גם: $f(0)=0$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

23. בציור מתואר גרף הנגזרת $f'(x)$ של פונקציה $f(x)$.



א. מצא את תחומי העלייה והירידה של $f(x)$.

ב. נתון: $f(0)=0$.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

24. $f(x)$ היא פונקציה שתחום ההגדרה שלה הוא $-3 \le x \le 3$.
לפניך גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ בתחום $0 \le x \le 3$.

א. נתון כי $f'(x)$ היא פונקציה זוגית בתחום $-3 \le x \le 3$.
העתק את השרטוט למחברתך, והשלם את הגרף של $f'(x)$ לכל התחום $-3 \le x \le 3$.

ב. מהם ערכי x עבורם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות?
ציין היכן יש מינימום והיכן יש מקסימום. נמק.

ג. נתון: $f(x)>0$ לכל x בתחום $-3 \le x \le 3$, $f(-2)=1$.
שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בכל התחום $-3 \le x \le 3$.

25. א. נתונה הפונקציה $f(x)=-x^3-3x^2-8x-24$.

(1) הוכח שהפונקציה $f(x)$ יורדת לכל ערך של x.

(2) חשב את $f(-3)$.

(3) על-פי הסעיפים (1) ו-(2), מצא עבור אילו ערכי x הפונקציה $f(x)$ שלילית, ועבור אילו ערכי x היא חיובית.

ב. נתונה הפונקציה $g(x)=-\frac{x^4}{4}-x^3-4x^2-24x-7$.

(1) מצא בעזרת סעיף א' את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$, וקבע אם היא מינימום או מקסימום.

(2) הסבר מדוע אין לפונקציה $g(x)$ נקודות קיצון נוספות.

ג. מצא עבור אילו ערכים של k למשוואה $g(x)=k$:

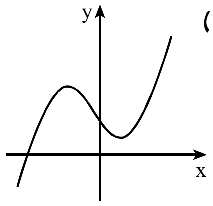
(1) יש פתרון יחיד. (2) יש שני פתרונות. (3) אין אף פתרון.

תשובות:

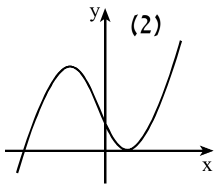
19. א. $(0;a^2)$. ב. (1) $\left(0.25a;a^2-\frac{a^3}{3}\right)$ מינימום, $\left(-0.25a;a^2+\frac{a^3}{3}\right)$ מקסימום.

(2) ברביע השני.

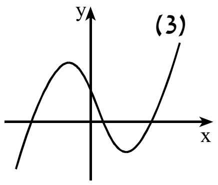
ג. (1)



(2)



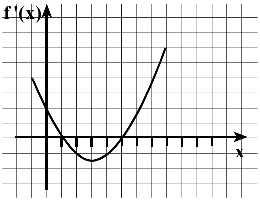
(3)



ד. (1) $a=3$. (2) $0<a<3$. (3) $a>3$.

20. א. חיובי. ב. גרף 1.

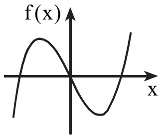
21. א.



ב. $y = 2x + 2$.

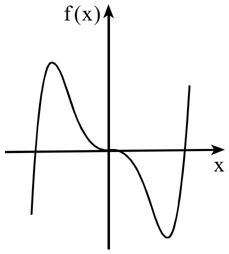
22. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$,
ירידה: $-2 < x < 2$.
ב. $x = -2$ מקסימום, $x = 2$ מינימום.

ג.

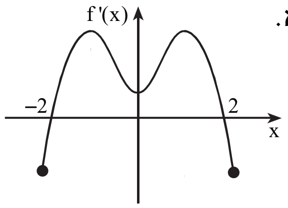


23. א. עלייה: $x > 2$ או $x < -2$.
ירידה: $-2 < x < 2$.

ב.

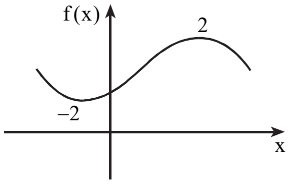


24. א.



ב. $x = -2$ מינימום, $x = 2$ מקסימום.

ג.



25. א. (2) $f(-3) = 0$. (3) חיובית: $x < -3$, שלילית: $x > -3$.
ב. (1) $(-3;35.75)$ מקסימום.
ג. (1) $k = 35.75$. (2) $k < 35.75$. (3) $k > 35.75$.

עבודת קיץ – פונקציות רציונליות (5 יחידות)

1. הישר $x=-1$ הוא אסימפטוטה לפונקציה $y=\frac{ax+16}{x^2-3x-b}$. בנקודה $x=2$ לפונקציה יש נקודת קיצון.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. דרך כל אחת משתי נקודות הקיצון של הפונקציה מעבירים משיק וישר המאונך למשיק. ארבעת הישרים הנ"ל יוצרים מרובע. חשב את שטח המרובע.

2. שיפוע המשיק לגרף הפונקציה $y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2-6x+8}$ בנקודה $(5;5\frac{1}{3})$ הוא $-\frac{40}{9}$.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה. (4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. (1) מצא את תחומי החיוביות של הפונקציה.
(2) מצא לאילו ערכי x שיפועי המשיקים לגרף הפונקציה הם חיוביים.

3. הישר $y=2$ הוא אסימפטוטה של הפונקציה $f(x)=a+\frac{4x-15}{(x-4)^2}$.
א. מצא את הערך של a .
ב. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.
ג. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ד. מצא את נקודות החיתוך של הפונקציה עם הצירים.
ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ו. הפונקציה $g(x)$ המקיימת $g(x)=2f(x)+c$. נקודת המינימום של הפונקציה $g(x)$ היא $(3.5;3)$. מצא את ערך הפרמטר c .

4. נתונה פונקציה $f(x)=\frac{2}{ax^2-x}$. אחת האסימפטוטות של הפונקציה היא ישר המקביל לציר ה- y (ולא מתלכד איתו). ישר זה חותך את הישר $y=x+3$ בנקודה ששיעור ה- y שלה הוא 4 .
א. מצא את הערך של הפרמטר a .
ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. מצא לאלו ערכים של t יש למשוואה $f(x)=t$:
(1) שני פתרונות. (2) אף פתרון. (3) פתרון אחד.

5. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{32x}{(x^2+3)^2}$.
א. הוכח שהפונקציה מוגדרת לכל ערך של x .
ב. מצא את הנקודות על גרף הפונקציה שבהן $f'(x)=0$, וקבע אם הן מסוג מינימום או מקסימום.
ג. הוכח שפונקציה $f(x)$ היא פונקציה אי-זוגית.

חקור את הפונקציות הבאות ומצא: א. תחום הגדרה, ב. נקודות קיצון,
ג. תחומי עלייה וירידה, ד. נקודות חיתוך עם הצירים,
ה. אסימפטוטות מקבילות לצירים, ו. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

.6 $y = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1}$ .7 $y = \frac{x^2 - 7x + 10}{3x^2 - 15x}$

.8 נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{x^2 + 2x + b^2}$ $(b > 1)$.
א. הבע באמצעות b את נקודות הקיצון של הפונקציה.
ב. מצא את b אם ערך הפונקציה בנקודת המקסימום שלה הוא $\frac{1}{8}$.

.9 נתונה הפונקציה $y = \frac{(x-a)^2}{x^2 + 5}$ $(a > 0)$.
א. הבע באמצעות a: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) אסימפטוטות מקבילות לצירים. (4) נקודות קיצון.
(5) תחומי עלייה וירידה.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

.10 נתונה הפונקציה $f(x) = 2 + \frac{ax^2 + 4}{x^2 - b^2}$ $(b > 0 \ ,\ a > 0)$.
א. בטא בעזרת a ו- b את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$.
ב. בטא בעזרת a ו- b את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
ג. עבור אילו ערכים של b מתקיים: $f(0) < 0$?
ד. נתון: $f(0) < 0$. תאר סקיצה של גרף הפונקציה.

.11 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2}{3 - x}$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה.
(4) נקודות חיתוך עם הצירים. (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. מצא עבור פונקציית הנגזרת $f'(x)$:
(1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם ציר ה- x.
(3) תחומי חיוביות ושליליות. (4) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
(5) שרטט סקיצה של גרף הנגזרת $f'(x)$.
הנח שלגרף הנגזרת $f'(x)$ אין נקודות קיצון.

.12 נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x^2 + 8x}{x^2 + 8}$.
א. מצא: (1) תחום הגדרה. (2) נקודות קיצון. (3) תחומי עלייה וירידה,
(4) נקודות חיתוך עם הצירים, (5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הפונקציה $f(x)$ היא **נגזרת** של פונקציה אחרת $g(x)$,
כלומר $g'(x) = f(x)$. בהנחה שתחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$
זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$:
(1) מצא את שיעורי ה- x של הנקודות שבהן לפונקציה $g(x)$
יש נקודות קיצון וקבע את סוג הקיצון.
(2) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $g(x)$.
(3) הסבר מדוע לפונקציה $g(x)$ אין אסימפטוטה אופקית.

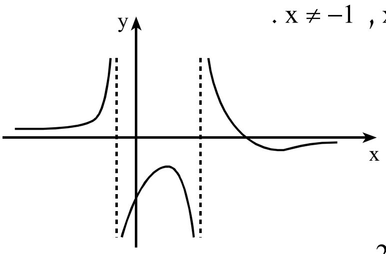
13. הנקודה $(4;-9)$ היא נקודת קיצון של הפונקציה $f(x)=\frac{ax+b}{x^2-9x+18}$.
א. מצא את a ואת b .
ב. מצא: תחום הגדרה, נקודות חיתוך עם הצירים, אסימפטוטות מקבילות לצירים, נקודות קיצון, תחומי עליה וירידה.
ג. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ד. הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=f(x)+11$. שרטט בתחום $3<x<6$ את הגרף של $f(x)$ ואת הגרף של $g(x)$ באותה מערכת הצירים.
ה. הפונקציה $h(x)$ מקיימת: $h(x)=f(x)+k$.
מצא את הערכים של k עבורם גרף הפונקציה $h(x)$ משיק לציר ה- x .

14. א. נתונה פונקציה $f(x)$. ידוע כי x_0 היא נקודת מקסימום (מקומי) של הפונקציה $f(x)$. כמו כן, $f''(x_0)\neq 0$.
הפונקציה $g(x)$ מקיימת $g(x)=-f(x)$.
הוכח: x_0 היא נקודת מינימום (מקומי) של הפונקציה $g(x)$.
ב. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2+4x+6}{x^2+4x+5}$.
מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגה.
ג. נגדיר $g(x)=-f(x)$. מצא את נקודת הקיצון של הפונקציה $g(x)$ וקבע את סוגה (היעזר בסעיפים קודמים).

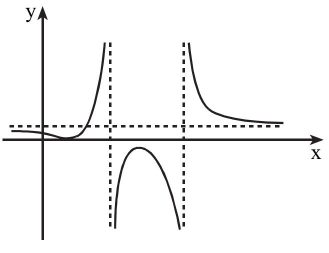
15. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-a)^2}{x^2+5}$, $a>0$.
א. חקור את הפונקציה ומצא (במידת הצורך הבע באמצעות a):
(1) תחום הגדרה. (2) נקודות חיתוך עם הצירים.
(3) נקודות קיצון. (4) תחומי עליה וירידה.
(5) אסימפטוטות מקבילות לצירים.
ב. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה.
ג. הנקודות A ו- B נמצאת על גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום שמימין לנקודת החיתוך של הגרף עם ציר ה- x . נסמן: $x_A=x_1$, $x_B=x_2$.
הוכח: $-1<f(x_1)-f(x_2)<1$.

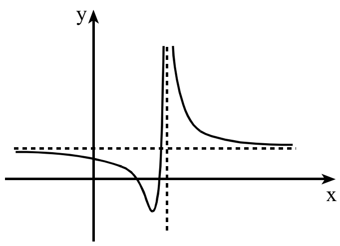
תשובות:

1. א. $a=-2$, $b=4$. ב. תחום הגדרה: $x\neq 4$, $x\neq -1$.
נקודות חיתוך: $(0;-4)$, $(8;0)$.
אסימפטוטות: $x=-1$, $x=4$, $y=0$.
נקודות קיצון: $(2;-2)$ מקסימום, $(14;-0.08)$ מינימום.
עלייה: $x>14$ או $-1<x<2$ או $x<-1$.
ירידה: $4<x<14$ או $2<x<4$. ד. 23.04 .



2. א. $a=1$, $b=-2$.
ב. (1) $x\neq 2$, $x\neq 4$.
(2) $(1;0)$ מינימום, $(2.5;-3)$ מקסימום.
(3) עלייה: $2<x<2.5$ או $1<x<2$.
ירידה: $x>4$ או $2.5<x<4$ או $x<1$.
(4) $(0;\frac{1}{8})$, $(1;0)$. (5) $x=2$, $x=4$, $y=1$.
ד. (1) $x>4$ או $1<x<2$ או $x<1$.
(2) $2<x<2.5$ או $1<x<2$.



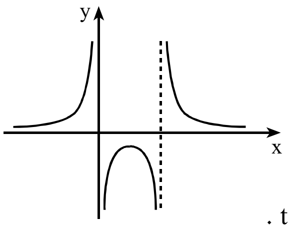


3. א. 2 . ב. $x \neq 4$.

ג. $(3.5;-2)$ מינימום.

ד. $(0;1\frac{1}{16})$, $(3.71;0)$, $(2.29;0)$.

ו. 7 .



4. א. 1 . ב. תחום הגדרה: $x \neq 0$, $x \neq 1$.

נקודות קיצון: $(\frac{1}{2};-8)$ מקסימום.

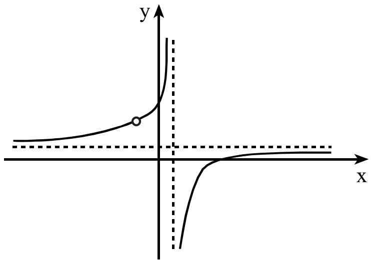
עלייה: $0<x<\frac{1}{2}$ או $x<0$; ירידה: $x>1$

או $\frac{1}{2}<x<1$. נקודות חיתוך: אין.

אסימפטוטות: $x=0$, $x=1$, $y=0$.

ד. (1) $t>0$ או $t<-8$. (2) $-8<t\le 0$. (3) $t=-8$.

5. ב. $(1;2)$ מקסימום, $(-1;-2)$ מינימום.



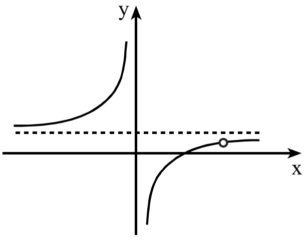
6. א. $x \neq 1$, $x \neq -1$. ב. אין.

ג. עלייה: $x>1$ או $-1<x<1$ או $x<-1$;

ירידה: אין.

ד. $(5;0)$, $(0;5)$.

ה. $x=1$, $y=1$.



7. א. $x \neq 0$, $x \neq 5$.

ב. אין.

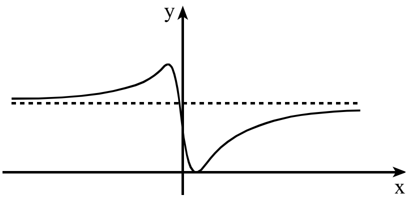
ג. עלייה: $x>5$ או $0<x<5$ או $x<0$;

ירידה: אין.

ד. $(2;0)$.

ה. $x=0$, $y=\frac{1}{3}$.

8. א. $(b;\frac{1}{2b+2})$ מקסימום, $(-b;\frac{-1}{2b-2})$ מינימום. ב. 3 .



9. א. (1) כל x .

(2) $(0;\frac{a^2}{5})$, $(a;0)$.

(3) $y=1$.

(4) $(a;0)$ מינימום,

$\left(-\frac{5}{a};\frac{a^2+5}{5}\right)$ מקסימום.

(5) עלייה: $x>a$ או $x<-\frac{5}{a}$.

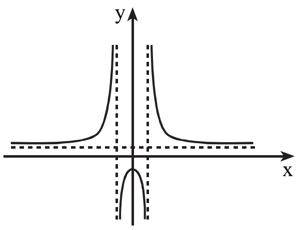
ירידה: $-\frac{5}{a}<x<a$.

10. א. $x=b$, $x=-b$, $y=a+2$.

ב. עלייה: $-b<x<0$ או $x<-b$.

ירידה: $x>b$ או $0<x<b$.

ג. $0<b<\sqrt{2}$ או $-\sqrt{2}<b<0$.



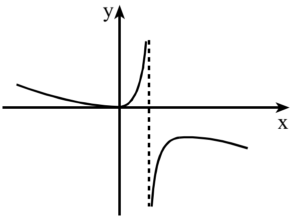
11. א. **(1)** $x\neq 3$.

(2) $(0;0)$ מינימום, $(6;-12)$ מקסימום.

(3) עלייה: $3<x<6$ או $0<x<3$;

ירידה: $x>6$ או $x<0$.

(4) $(0;0)$. **(5)** $x=3$.



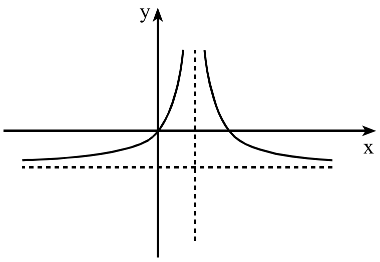
ג. **(1)** $x\neq 3$.

(2) $(0;0)$, $(6;0)$.

(3) חיוביות: $0<x<3$ או $3<x<6$;

שליליות: $x>6$ או $x<0$.

(4) $x=3$, $y=-1$.



12. א. **(1)** כל x . **(2)** $(4;2)$ מקסימום, $(-2;-1)$ מינימום.

(3) עלייה: $-2<x<4$;

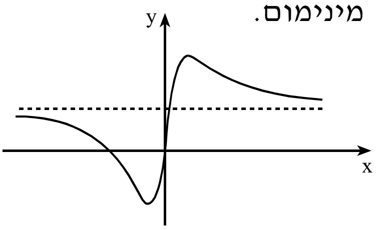
ירידה: $x>4$ או $x<-2$.

(4) $(0;0)$, $(-8;0)$. **(5)** $y=1$.

ג. **(1)** $x=0$ מינימום, $x=-8$ מקסימום.

(2) עלייה: $x>0$ או $x<-8$;

ירידה: $-8<x<0$.



13. א. $a=9$, $b=-18$.

ב. תחום הגדרה: $x\neq 3$, $x\neq 6$.

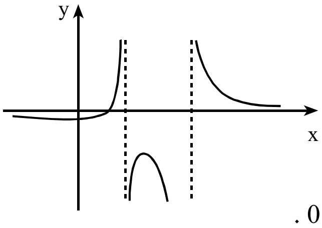
נקודות חיתוך: $(0;-1)$, $(2;0)$.

אסימפטוטות: $x=3$, $x=6$, $y=0$.

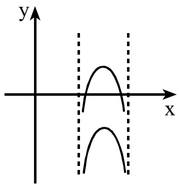
נקודות קיצון: $(4;-9)$ מקסימום,

$(0;-1)$ מינימום. עלייה: $3<x<4$ או $0<x<3$.

ירידה: $x>6$ או $4<x<6$ או $x<0$.



ד.



ה. 1 או 9 .

14. ב. $(-2;2)$ מקסימום. ג. $(-2;-2)$ מינימום.

15. א. **(1)** כל x .

(2) $(0;\frac{a^2}{5})$, $(a;0)$.

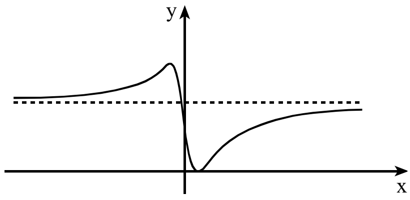
(3) $(a;0)$ מינימום,

$\left(-\frac{5}{a};\frac{a^2+5}{5}\right)$ מקסימום.

(4) עלייה : $x>a$ או $x<-\frac{5}{a}$;

ירידה : $-\frac{5}{a}<x<a$.

(5) $y=1$.



עבודת קיץ – בעיות קיצון (5 יחידות)

1. מבין כל זוגות המספרים החיוביים שסכומם 10, מצא את זוג המספרים שמכפלת ריבועו של האחד בחזקה השלישית של השני היא מקסימלית. מצא גם את המכפלה המקסימלית.

תשובה: 4, 6, 3456.

2. הסכום של שני מספרים הוא a.
הוכח כי סכום ריבועיהם המינימלי הוא $\frac{1}{2}a^2$.

3. x ו- y הם שני מספרים חיוביים שסכומם 1.
א. הוכח: $xy \le \frac{1}{4}$. ב. $x^2 + y^2 \ge \frac{1}{2}$

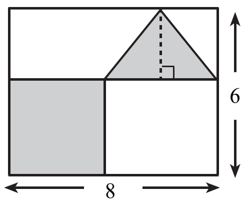
4. סכומם של שלושה מספרים אי-שליליים הוא 30.
נתון כי שניים מהמספרים שווים זה לזה.
מצא את שלושת המספרים שמכפלתם: א. מקסימלית. ב. מינימלית.

תשובה: א. 10, 10, 10. ב. 0, 0, 30 או 15, 15, 0.

5. חותכים חוט שאורכו 80 ס"מ לשני חלקים. מכל אחד מהחלקים מכינים ריבוע. מה צריך להיות אורך כל אחד מהחלקים, כדי שסכום השטחים של שני הריבועים יהיה מינימלי?

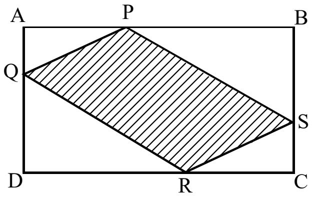
תשובה: 40 ס"מ, 40 ס"מ.

6. בתוך מלבן שאורכו 8 ס"מ ורוחבו 6 ס"מ חסומים ריבוע ומשולש אפורים.
מה צריך להיות אורך צלע הריבוע כדי שהשטח האפור יהיה מינימלי?



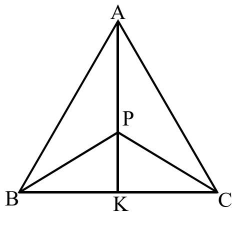
תשובה: $2\frac{1}{3}$ ס"מ.

7. נתון מלבן $ABCD$ שממדיו: $AB = 32$ ס"מ ו- $AD = 24$ ס"מ. על צלעות המלבן מקצים קטעים: $AP = CR = 2x$, $CS = AQ = x$.
מצא את שטחה המקסימלי של המקבילית $PQRS$.



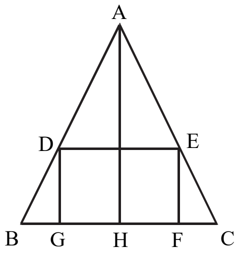
תשובה: 400 סמ"ר.

8. במשולש שווה-שוקיים ABC אורך הבסיס BC הוא 4 ס"מ והגובה לבסיס הוא 2 ס"מ.
הגובה חותך את הבסיס בנקודה K.
נקודה P נמצאת על הגובה לבסיס בין A ל- K.
מה צריך להיות אורכו של הקטע PK, כדי שהסכום $(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2$ של ריבועי מרחקי הנקודה P מקדקודי המשולש יהיה מינימלי?



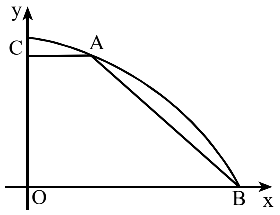
תשובה: $\frac{2}{3}$ ס"מ.

9. במשולש שווה-שוקיים שבסיסו 10 ס"מ ושוקו 13 ס"מ חסום מלבן שאחת מצלעותיו נמצאת על בסיס המשולש ושניים מקדקודיו נמצאים על השוקיים.
מה צריך להיות אורך הצלע DE של המלבן, כדי ששטחו של המלבן יהיה מקסימלי?



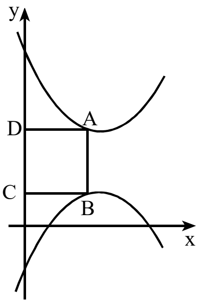
תשובה: 5 ס"מ.

10. נקודה A נמצאת על גרף הפונקציה $y=-x^2+81$ ברביע הראשון. הקטע AC מקביל לציר ה- x. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A, כדי ששטח הטרפז ישר-הזווית ABOC יהיה מקסימלי.



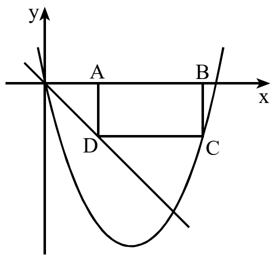
תשובה: $(3;72)$.

11. נקודה A נמצאת על הפונקציה $y=x^2-3x+9$ ברביע הראשון. נקודה B נמצאת על הפונקציה $y=-x^2+3x-2$ ברביע הראשון. הקטע AB מקביל לציר ה- y. הנקודות C ו- D נמצאת על ציר ה- y כך ש- ABCD מלבן. מצא מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן יהיה מינימלי.



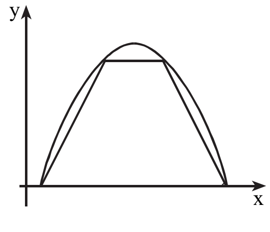
תשובה: $(1.25;6.8125)$.

12. בין גרף הפונקציה $y=x^2-6x$, הישר $y=-x$ וציר ה- x חסום ברביע הרביעי מלבן ABCD שצלעו AB מתלכדת עם ציר ה- x (ראה ציור).
מה צריכים להיות שיעורי הנקודה B, כפי ששטח המלבן יהיה מקסימלי?



תשובה: $(5.545;-2.524)$.

13. בין גרף הפרבולה $y=-x^2+16x-28$ לבין ציר ה- x חסום טרפז (ראה ציור).
נסמן ב- S את שטח הטרפז.
הוכח: $S\le 256$.



14. א. לאילו ערכים של x המשיקים לגרף הפונקציה $y=-x^3+9x^2-24x$ יוצרים זווית חדה עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.
ב. מצא את הזווית החדה הגדולה ביותר שהמשיק לגרף הפונקציה יוצר עם הכיוון החיובי של ציר ה- x.

תשובה: א. $2<x<4$. ב. 71.57°.